解析学 I 問題解説 #8

河野

演習問題 2.15　(a,b) で f が (広義の) 極小値をとるならば，(a,b) は f の臨界点であることを示せ。

(a,b) で f が広義の極小値をとるので十分小さい (0 に近い) h と k に対して，$f(a,b) \leqq f(a+h,b+k)$ が成立している。$h>0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geqq 0$ より

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to+0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \geqq 0$$

が成立する。また $h<0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leqq 0$ より

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to-0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \leqq 0$$

が成立する。よって $f_x(a,b)=0$ である。

$k>0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geqq 0$ より

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to+0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \geqq 0$$

が成立する。また $k<0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leqq 0$ より

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to-0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} \leqq 0$$

が成立する。よって $f_y(a,b)=0$ である。よって (a,b) は f の臨界点である。

演習問題 2.16　例 2.26 において $H'>0$ かつ $A<0$ のとき $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大値をとることを示せ。

$y=0$ のとき $f(x,0)=Ax^2$ となるので，$x\neq 0$ のとき $f(x,0)=Ax^2<0=f(0,0)$ となっている。$y\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}f(x,y) = A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{x}{y}\right) + C$ である。$g(t)=At^2+2Bt+C$ とおくと，$H'>0$ かつ $A<0$ なので，任意の t に対し $g(t)<0$ である (H は $g(t)$ の判別式の符号を逆にしたもの)。よって $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)<0$ となり，$f(x,y)<0$ が得られる。以上により $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)<f(0,0)$ なので $(0,0)$ で極大値をとる。

演習問題 2.17　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$　　(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a\neq 0, b\neq 0)$　　(4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a>b>0)$

(5) $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$ (6) $z = x^3 - 3xy + y^3$
(7) $z = xy(x^2 + y^2 - 1)$ (8) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(1) (a) 最初に臨界点 ($z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点) を求める。$z_x = 2x - y - 2, z_y = -x + 2y + 3$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと $x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{4}{3}$ が得られる。(b) 次にヘッシアンを計算する。$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$ なので $H(x, y) = 2^2 - (-1)^2 = 3 > 0, z_{xx} > 0$ である。よって z は $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとる。

(2) 同様に計算すると $\left(-\dfrac{1}{17}, \dfrac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが，$H(x, y) = -17 < 0$ である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3) $z_x = \dfrac{a}{x^2 + y^2 + 1} - \dfrac{2(ax + by)x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, $z_y = \dfrac{b}{x^2 + y^2 + 1} - \dfrac{2(ax + by)y}{x^2 + y^2 + 1}{}^2$ なので臨界点は連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ の解である。$z_x = 0$ より $x = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}a$ となる。また $z_y = 0$ より $y = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}b$ となる。$k = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}$ とおくと $x = ka, y = kb$ となる。これを $z_x(x^2 + y^2 + 1) = a(x^2 + y^2 + 1) - 2(ax + by)x = 0$ に代入して

$$a((a^2 + b^2)k^2 + 1) - 2(a^2 + b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ となるので，臨界点は

$$(x, y) = \left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

である。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{2(ax^3 - 3y^2ax - 3ax + 3byx^2 - by^3 - by)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \dfrac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ \dfrac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & -\dfrac{2(3byx^2 - by^3 + 3by - 3y^2ax + ax^3 + ax)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{vmatrix}$$

となるが，

$$H\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{a^2 + b^2}{4} > 0$$

なので $z_{xx}\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} > 0$ より $(x, y) = \left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1}$$

である。

(4) $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}ax, z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)+2e^{-(x^2+y^2)}by$ となっている。連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解く。$e^{-(x^2+y^2)} \neq 0$ なので

$$z_x = 0 \iff x = 0 \vee a-(ax^2+by^2) = 0, \qquad z_y = 0 \iff y = 0 \vee b-(ax^2+by^2) = 0$$

となっている。場合分けを実行する。(a) $x = 0$，(b) $a-(ax^2+by^2) = 0$，(c) $y = 0$，(d) $b-(ax^2+by^2) = 0$，とすると，

$$\Big(\text{(a)} \vee \text{(b)}\Big) \wedge \Big(\text{(c)} \vee \text{(d)}\Big) = \Big(\text{(a)} \wedge \text{(c)}\Big) \vee \Big(\text{(a)} \wedge \text{(d)}\Big) \vee \Big(\text{(b)} \wedge \text{(c)}\Big) \vee \Big(\text{(b)} \wedge \text{(d)}\Big)$$

となる。

(1) (a) $\wedge$ (c) のとき：この場合は $x = 0$ かつ $y = 0$ なので解は $(x, y) = (0, 0)$ である。

(2) (a) $\wedge$ (d) のとき：$x = 0$ を $b-(ax^2+by^2) = 0$ に代入すると，$b(1-y^2) = 0$ となる。$b \neq 0$ より $1-y^2 = 0$，よって $y = \pm 1$ となる。この場合解は $(x, y) = (0, \pm 1)$ である。

(3) (b) $\wedge$ (c) のとき：$y = 0$ を $a-(ax^2+by^2) = 0$ に代入すると，$a(1-x^2) = 0$ となる。$a \neq 0$ より $1-x^2 = 0$，よって $x = \pm 1$ となる。この場合解は $(x, y) = (\pm 1, 0)$ である。

(4) (a) $\wedge$ (d) のとき：$a = ax^+by^2 = b$ となるので $a = b$ となり，$a > b$ に矛盾する。よってこの場合解はない。

以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2-by^2+2x^4a+2x^2by^2+a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2-b-a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2-5by^2+2y^2ax^2+2y^4b+b) \end{vmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} H(0,0) &= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0 \\ H(0,1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(0,-1) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0 \\ H(1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \\ H(-1,0) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0 \end{aligned}$$

となる。よって z は $(x,y)=(0,0)$ で極小値 $z(0,0)=0$，$(x,y)=(\pm 1,0)$ で極大値 $z(\pm 1,0)=\dfrac{a}{e}$ をとる。

(5)　最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2+2y^2-6x, \quad z_y = 4xy-6y$$

なので $z_y=0$ より $y(2x-3)=0$ となるので，$y=0$ または $2x-3=0$ となる。$y=0$ のとき

$$z_x(x,0)=3x^2+2\cdot 0^2-6x=3x^2-6x=0$$

を得る。よって $y=0$ のときは $x=0$ または $x=2$ である。

$x=\dfrac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2},y\right)=3\left(\frac{3}{2}\right)^2+2y^2-6\cdot\frac{3}{2}=0$$

を得る。よって $y=\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0)\,, \quad (2,0)\,, \quad \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx}=6x-6, \quad z_{xy}=4y, \quad z_{yy}=4x-6$$

なので

$$H(x,y)=12(x-1)(2x-3)-16y^2$$

となる。よって

$$H(0,0)=36>0, H(2,0)=12>0, H\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-18<0, H\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-18<0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(0,0)$ と $(2,0)$ である。$z_{xx}(0,0)=-6<0$，$z_{xx}(2,0)=6>0$ なので $(0,0)$ では極大，$(2,0)$ では極小である。

(6)　最初に臨界点を求める。

$$z_x=3x^2-3y, \quad z_y=-3x+3y^2$$

なので $z_x=0$ から $z_y=0$ を引くことにより

$$\begin{aligned}0&=x^2-y^2-y+x=(x^2-y^2)+(x-y)\\&=(x-y)(x+y)+(x-y)\\&=(x-y)(x+y+1)\end{aligned}$$

を得る。よって $x=y$ または $x+y=-1$ が成立する。

最初に $x+y=-1$ が成立している場合を考える。$y=-1-x$ を $x=y^2$ に代入すると，$x=(1+x)^2$ より $x^2+x+1=0$ を得る。この 2 次方程式は実数解を持たないので，この場合は解はない。よって $x=y$ が成立する。これをもとの方程式に代入すると $x=0,1$ が得られる。よって臨界点は

$$(x,y)=(0,0),\quad (1,1)$$

である。

$$z_{xx}=6x,\quad z_{xy}=-3,\quad z_{yy}=6y$$

なので

$$H(x,y)=36xy-9$$

となる。よって

$$H(0,0)=-9<0,\quad H(1,1)=27>0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(x,y)=(1,1)$ である。$z_{xx}(1,1)=6>0$ なので $(1,1)$ で極小である。

(7) 最初に臨界点を求める。

$$z_x=y(x^2+y^2-1)+2x^2y,\quad z_y=x(x^2+y^2-1)+2xy^2$$

なので $z_x=0$ から $z_y=0$ を引くことにより

$$\begin{aligned}0&=(y-x)(x^2+y^2-1)+2xy(x-y)=(y-x)(x^2+y^2-1)-2xy(y-x)\\&=(y-x)(x^2+y^2-1-2xy)=(y-x)\big((x-y)^2-1\big)\\&=(y-x)(x-y-1)(x-y+1)\end{aligned}$$

を得る。よって $x=y$ または $x-y-1=0$ または $x-y+1=0$ が成立する。

最初に $x=y$ が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned}0=z_x(x,x)&=x(x^2+x^2-1)+2x^3=x(4x^2-1)\\&=x(2x-1)(2x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\pm\dfrac{1}{2}$ となる。よってこの場合

$$(x,y)=(0,0),\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に $x-y-1=0$ の場合を考える。$y=x-1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x-1)&=x\big(x^2+(x-1)^2-1\big)+2x(x-1)^2=x\big(x^2+(x-1)^2-1+2(x-1)^2\big)\\&=x(4x^2-6x+2)=2x(2x^2-3x+1)\\&2x(2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\dfrac{1}{2}$ または $x=1$ となる。今の場合 $y=x-1$ なので

$$(x,y)=(0,-1),\quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad (1,0)$$

である。

最後に次に $x-y+1=0$ の場合を考える。$y=x+1$ なので

$$\begin{aligned}0=z_y(x,x+1)&=x\bigl(x^2+(x+1)^2-1\bigr)+2x(x+1)^2=x\bigl(x^2+(x+1)^2-1+2(x+1)^2\bigr)\\&=x(4x^2+6x+2)=2x(2x^2+3x+1)\\&2x(2x+1)(x+1)\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=-\dfrac{1}{2}$ または $x=-1$ となる。今の場合 $y=x+1$ なので

$$(x,y)=(0,1),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad (-1,1)$$

である。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx}=6xy,\quad z_{xy}=3x^2+3y^2-1,\quad z_{yy}=6xy$$

なので

$$H(x,y)=36x^2y^2-(3x^2+3y^2-1)^2$$

となる。よって

$$H(0,0)=-1<0,H(0,\pm1)=-4<0,H(\pm1,0)=-4<0,H\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0,H\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=2>0$$

となる。よって極値を与える (x,y) は $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$, である。

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)>0,\quad z_{xx}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=z_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<0$$

なので $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ で極小であり，$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ で極大である。

(8) 最初に臨界点を求める。

$$z_x=4x^3-4x+4y,\quad z_y=4y^3+4x-4y$$

なので $z_x=0$ と $z_y=0$ を加えて 4 で割ると

$$0=x^3+y^3=(x+y)+(x^2-xy+y^2)$$

を得る。よって $x+y=0$ または $x^2-xy+y^2=0$ が成立する。
最初に $x^2-xy+y^2=0$ が成立している場合を考える。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$$

より $x=0, y=0$ を得る。これは $z_x(0,0)=0, z_y(0,0)=0$ を満たしている。
次に $x+y=0$ の場合を考える。$y=-x$ を代入すると

$$\begin{aligned}0=z_x(x,-x)&=4x^3-4x-4x=4(x^3-2x)\\&=4x(x^2-2)=4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\end{aligned}$$

より $x=0$ または $x=\sqrt{2}$ または $x=-\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx}=12x^2-4,\quad z_{xy}=4,\quad z_{yy}=12y^2-4$$

なので

$$H(x,y)=16(3x^2-1)(3y^2-1)-16$$

となる。よって

$$H(0,0)=0,\quad H(\sqrt{2},-\sqrt{2})=H(-\sqrt{2},\sqrt{2})=384>0$$

となる。$z_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=z_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2})>0$ なので $(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小である。
$(x,y)=(0,0)$ はこれだけではよく分からない。最初に $y=x$ 上での z の動きを見よう。$g(x)=z(x,x)$ とおくと

$$g(x)=2x^4$$

となるので $x=0$ で極小である。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=x$ を満たしている)，$z(x,y)>z(0,0)$ となる点がある。
次に $y=-x$ 上での z の動きを見よう。$h(x)=z(x,-x)$ とおくと

$$h(x)=2x^4-8x^2$$

となる。$h(x)$ の増減表を書いて $x=0$ のまわりの状況を調べると，$y=-x$ 上では極大になっている。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で (今の場合 $y=-x$ を満たしている)，$z(x,y)<z(0,0)$ となる点がある。十分近くに $z(0,0)$ より大きい点も小さい点もあるので，z は $(0,0)$ で極値をとらない。
以上により $(x,y)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ で極小値をとる。

演習問題 **2.18**
(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。
(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

講義ではこの部分は省略したが，解説はしておこう。

(1) このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a, b, c とする。$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x, y, z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく，即ち $x+y+z=2s$ $(s>0)$ が成立している。x, y, z は辺の長さであるから $x>0, y>0, z>0$ を満たしている。x, y, z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式，即ち $x+y>z, y+z>x, z+x>y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき，3 辺の長さが x, y, z であるような 3 角形が存在する。z を消去して x, y の不等式から $x<s, y<s, x+y>s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x, y は最初の 6 つの不等式を満たす。

$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \leqq s, y \leqq s, x+y \geqq s \right\}$ とおく。ここで S が最大のとき S^2 が最大であり，逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めるればよい。

$$f(x,y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

とおき，$\overline{D}$ 上で $f(x,y)$ の最大値を求める。$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x,y)=0$ となる。よって内部で最大値をとる。この点は臨界点なので臨界点を求める。

$$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$$
$$f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$$

を解いて $(x,y) = (0,s).(s,0),(s,s),\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在する。$f(0,s)=0$，$f(s,0)=0$，$f(s,s)=0$，$f\left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right) = \dfrac{s^4}{27}$ なので最大値を与える点は $(x,y) = \left(\dfrac{2s}{3}, \dfrac{2s}{3}\right)$ である。このとき $x=y=z=\dfrac{2s}{3}$ なので 3 角形は正 3 角形である。以上により正 3 角形のとき面積最大になる。

(2) 定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$ とおくと $s+t+u=2\pi$ が成立している。最大面積を求めるので，ABC は O を含んでいるとしてよい。このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0<s<\pi, 0<t<\pi, 0<u<\pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s<\pi, t<\pi, s+t>\pi \right\}$ となる。

3 角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t) \right)$$

なので，$\overline{D} = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s \leqq \pi, t \leqq \pi, s+t \geqq \pi \right\}$ 上で

$$z = f(s,t) = \frac{1}{2} r^2 \left(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t) \right)$$

の最大値を求める問題になる。

$\overline{D}$ は有界閉集合であり，$f(x,y)$ は $\overline{D}$ 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。$L_1 = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, s = \pi, 0 \leqq t \leqq \pi \right\}$，$L_2 = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq \pi, t = \pi \right\}$，$L_3 = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq \pi, s + t = \pi \right\}$ とおくと $\partial\overline{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。L_1 上で z は

$$
\begin{aligned}
z = f(\pi,t) &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin\pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2\left(\sin t + \sin(\pi - t)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2\left(\sin t + \sin t\right) = r^2 \sin t
\end{aligned}
$$

となるので，L_1 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。L_2 上では

$$
z = f(s,\pi) = r^2 \sin s
$$

となるので，L_2 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ のときで値は $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) = r^2$ である。L_3 上では $t = \pi - s$ なので

$$
\begin{aligned}
z = f(s,\pi - s) &= \frac{1}{2}r^2\left(\sin\pi + \sin(\pi - s) + \sin(2\pi - \pi)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin(\pi - s)\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2\left(\sin s + \sin s\right) = r^2 \sin s
\end{aligned}
$$

となる。L_3 上で最大になるのは $(s,t) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。以上により境界上での最大値は r^2 で $(s,t) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$
z_s = \frac{1}{2}r^2\left(\cos s - \cos(2\pi - s - t)\right), \qquad z_t = \frac{1}{2}r^2\left(\cos t - \cos(2\pi - s - t)\right)
$$

なので臨界点では $\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$ かつ $\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$ が成立している。これより $\cos s = \cos t$ が得られる。$0 \leqq s \leqq \pi$ かつ $0 \leqq t \leqq \pi$ であるが，この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = t$ が成立する。$t = s$ を代入して $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$ を得る。$0 \leqq s \leqq \pi$ より，$0 \leqq 2s \leqq 2\pi$，$-2\pi \leqq -2s \leqq 0$，$0 \leqq 2\pi - 2s \leqq 2\pi$ と変形できる。この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = 2\pi - 2s$ が成立する。よって臨界点は $(s,t) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ である。

$$
f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)
$$

なので f は $(s,t) = \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。$s = t = u = \dfrac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。

演習問題 2.19　次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。
(1) $1 - y + xe^y = 0$
(2) $x^3y^3 + y - x = 0$
(3) $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (デカルトの正葉線)

(1)　式の両辺を x で微分すると
$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{1}$$
となる。よって
$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$
となる。式 (1) の両辺を x で微分すると
$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$
となるので
$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^2}$$
となる。
(2)　式の両辺を x で微分すると
$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{2}$$
となる。よって
$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$
となる。式 (2) の両辺を x で微分すると
$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$
となるので
$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$
となる。
(3)　式の両辺を x で微分すると
$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0 \tag{3}$$
となる。よって
$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$
となる。式 (3) の両辺を x で微分すると
$$6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$$
となるの。
$$2\left(x - y' + yy'^2\right) + (y^2 - x)y'' = 0$$

と変形する。

$$\begin{aligned}
x - y' + yy'^2 &= x + y'\left(yy' - 1\right) = x + \frac{x^2 - y}{x - y^2}\left(y\frac{x^2 - y}{x - y^2} - 1\right) \\
&= x\left(1 + \frac{(x^2 - y)(xy - 1)}{(x - y^2)^2}\right) = xy\left(\frac{x^3 - 3xy + y^3 + 1}{(x - y^2)^2}\right) \\
&= \frac{xy}{(x - y^2)^2} \qquad (\text{変形の途中で } x^3 - 3xy + y^3 = 0 \text{ を使用})
\end{aligned}$$

なので

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

となる。