

演習問題 *2.20 定理 2.19 を証明せよ (テキスト p83 参照)。

(a, b) の近傍を $U = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\}$ とする。これから考える点はすべてこの近傍に含まれているとする。

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \quad (4)$$

とおく。 $F(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$ とおくと $\Delta = F(a+h) - F(a)$ となっている。また $F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$ が成立する。平均値の定理を $F(x)$ に適用すると

$$F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} \Delta &= F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta h) \\ &= h(f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)) \end{aligned}$$

さらに平均値の定理を適用すると

$$= hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta'k)$$

となる。 f_{xy} は連続なので

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{xy}(a, b) \quad (5)$$

が成立する。

また

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{1}{h} \left(\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \right)$$

よって $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk} = \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h}$ となる。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk}$ なので $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta}{hk}$ は収束し

$$\begin{aligned} f_{yx}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta}{hk} \\ &= f_{xy}(a, b) \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.21 上でのべた事を証明せよ。即ち系を仮定して次を示せ。

(1) $z = f(x, y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) $z = f(x, y)$ が C^n 級ならば

$$z_{\dots xy \dots} = z_{\dots yx \dots}$$

が成立する。ただし \dots 部分は同じとし、微分は全部で n 回されるものとする。

(3) $z = f(x, y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

(1) z が C^3 級のとき、 z_x および z_y は C^2 級である。 z_x に系を適用すると

$$z_{xxy} = (z_x)_{xy} = (z_x)_{yx} = z_{xyx}$$

が得られる。 z_y に系を適用すると

$$z_{yyx} = (z_y)_{yx} = (z_y)_{xy} = z_{yxy}$$

z は C^3 級であるから、 C^2 級でもある。よって系より $z_{xy} = z_{yx}$ が成立する。よって

$$z_{xyx} = (z_{xy})_x = (z_{yx})_x = z_{yxx}$$

$$z_{xyy} = (z_{xy})_y = (z_{yx})_y = z_{yxy}$$

となる。

(2) * α, β を x と y からなる列とする。ただし α は k 個の x, y から、 β は $n - k - 2$ 個の x, y からできているとする。ただし $k \leq n - 2$ とする。ここで証明すべきことは

$$z_{\alpha xy \beta} = z_{\alpha yx \beta}$$

である。

z_α は z を k 回微分したものなので C^{n-k} 級である。 $n - k \geq 2$ なので系が適用できる。このとき

$$(z_\alpha)_{xy} = (z_\alpha)_{yx}$$

が成立する。よって

$$z_{\alpha xy} = (z_\alpha)_{xy} = (z_\alpha)_{yx} = z_{\alpha yx}$$

が成立する。これより

$$z_{\alpha xy \beta} = (z_{\alpha xy})_\beta = (z_{\alpha yx})_\beta = z_{\alpha yx \beta}$$

の成立が示される。

(3) * γ を x と y からなる列で、 x が k 個、 y が $n - k$ 個からなるとする。 ω を

$$\omega = \underbrace{x \cdots x}_k \text{個} \underbrace{y \cdots y}_{n-k} \text{個}$$

となる列とするとき

$$z_\gamma = z_\omega$$

を示せばよい。 γ が $\dots yx\dots$ という部分列を含まなければ、 $\gamma = \omega$ なので $z_\gamma = z_\omega$ が成立する。 γ が $\dots yx\dots$ という部分列を含んだとする。 $\gamma = \alpha yx\beta$ と表記したとき $\gamma_1 = \alpha xy\beta$ とおく。このとき(2)の結果より $z_\gamma = z_{\gamma_1}$ が成立している。 γ_1 が $\dots yx\dots$ という部分列を含まなければ $\gamma_1 = \omega$ となっているて、 $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_\omega$ となり、命題は示される。 γ_1 が $\dots yx\dots$ という部分列を含んだとする。 $\gamma_1 = \alpha_1 yx\beta_1$ と表記したとき $\gamma_2 = \alpha_1 xy\beta_1$ とおく。このとき(2)の結果より $z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2}$ が成立している。 γ_2 が $\dots yx\dots$ という部分列を含まなければ、 $\gamma_2 = \omega$ なので $z_\gamma = z_{\gamma_1} = z_{\gamma_2} = z_\omega$ が成立する。このことを続けていくことによりいつかは ω になる。即ち列 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ が存在して $\gamma_t = \omega$ となることが分かる。(2)より任意の k に対し $z_{\gamma_k} = z_{\gamma_{k+1}}$ が成立するので

$$z_\gamma = z_{\gamma_1} = \dots = z_{\gamma_t} = z_\omega$$

が成立する。

演習問題 2.22 次の関数を (a, b) において最もよく近似する1次式, 2次式および3次式求めよ。ただし演習問題 2.17の結果は用いてもよい。

$$(1) z = f(x, y) = (x - 1)(y + 2) \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$(2) z = f(x, y) = \frac{1}{1 - 2x + 3y} \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$(3) z = f(x, y) = \sin(x + y) \quad (a, b) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f_x = y + 2, f_y = x - 1, f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 1, f_{xxx} = 0, f_{xxy} = 0, f_{xyy} = 0, f_{yyy} = 0$ なので $f(0, 0) = -2, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -1, f_{xx}(0, 0) = 0, f_{xy}(0, 0) = 1, f_{yy}(0, 0) = 0, f_{xxx}(0, 0) = 0, f_{xxy}(0, 0) = 0, f_{xyy}(0, 0) = 0, f_{yyy}(0, 0) = 0$ となる。 $f(x, y)$ を $(0, 0)$ で最もよく近似する1次式は

$$f(0 + h, 0 + k) \sim -2 + 2h - k$$

であり、最もよく近似する2次式は

$$f(0 + h, 0 + k) \sim -2 + 2h - k + hk = f(h, k)$$

であり、最もよく近似する3次式は

$$f(0 + h, 0 + k) \sim -2 + 2h - k + hk = f(h, k)$$

となる。この場合 $f(x, y)$ は2次式なので、近似の式は2次の段階で $f(x, y)$ に一致している。

(2) $f_x = \frac{2}{(1 - 2x + 3y)^2}, f_y = -\frac{3}{(1 - 2x + 3y)^2}, f_{xx} = \frac{8}{(1 - 2x + 3y)^3}, f_{xy} = -\frac{12}{(1 - 2x + 3y)^2}, f_{yy} = \frac{18}{(1 - 2x + 3y)^3}, f_{xxx} = \frac{48}{(1 - 2x + 3y)^4}, f_{xxy} = -\frac{72}{(1 - 2x + 3y)^4}, f_{xyy} = \frac{108}{(1 - 2x + 3y)^4}, f_{yyy} = -\frac{162}{(1 - 2x + 3y)^4}$ なので $f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = 2, f_y(0, 0) = -3, f_{xx}(0, 0) = 8, f_{xy}(0, 0) = -12, f_{yy}(0, 0) = 18, f_{xxx}(0, 0) = 48, f_{xxy}(0, 0) = -72, f_{xyy}(0, 0) = 108, f_{yyy}(0, 0) = -162$ となる。 $f(x, y)$ を $(0, 0)$ で最もよく近似する1次式は

$$f(0 + h, 0 + k) \sim 1 + 2h - 3k$$

であり、最もよく近似する 2 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim 1+2h-3k+4h^2-12hk+9k^2$$

であり、最もよく近似する 3 次式は

$$f(0+h, 0+k) \sim 1+2h-3k+4h^2-12hk+9k^2+8h^3-36h^2k+54hk^2-27h^3$$

となる。

(3) $f_x = f_y = \cos(x+y)$, $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\sin(x+y)$, $f_{xxx} = -\cos(x+y)$, $f_{xxy} = -\cos(x+y)$, $f_{xyy} = -\cos(x+y)$, $f_{yyy} = -\cos(x+y)$ なのて $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f_{xxx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f_{xxy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f_{xyy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f_{yyy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$ となる。 $f(x, y)$ を $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で最もよく近似する 1 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h, \frac{\pi}{2}+k\right) \sim -h-k$$

であり、最もよく近似する 2 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h, \frac{\pi}{2}+k\right) \sim -h-k$$

であり、最もよく近似する 3 次式は

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h, \frac{\pi}{2}+k\right) \sim -h-k + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{2}h^2k + \frac{1}{2}hk^2 + \frac{1}{6}k^3$$

となる。

演習問題 *2.23

(1) $f(x, y) + Df(x, y)$ が (x, y) で $f(x+h, y+k)$ を最もよく近似する 1 次式であることを示せ。

(2) $f(x, y) + Df(x, y) + \frac{1}{2!}D^2f(x, y)$ が (x, y) で $f(x+h, y+k)$ を最もよく近似する 2 次式であることを示せ。

(3) $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}D^j f(x, y)$ が (x, y) で $f(x+h, y+k)$ を最もよく近似する n 次式であることを示せ。

(1) $\varepsilon(h, k) = \frac{f(x+h, y+k) - (f(x, y) + Df(x, y))}{\sqrt{h^2+k^2}}$ とおくと、テーラーの定理より

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2+k^2} &= f(x+h, y+k) - (f(x, y) + Df(x, y)) = R_2 = \frac{1}{2!}D^2(x+\theta h, y+\theta k) \\ &= \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\theta h, y+\theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta h, y+\theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+\theta h, y+\theta k) \right) \end{aligned}$$

となる。 $M_1 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\theta h, y+\theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$, $M_2 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta h, y+\theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$,

$M_3 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x + \theta h, y + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$, $M = \max \{ M_1, M_2, M_3 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} & \left| h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + \theta h, y + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \theta h, y + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x + \theta h, y + \theta k) \right| \\ & \leq M_1 h^2 + 2M_2 |h| |k| + M_3 k^2 \leq M h^2 + 2M |h| |k| + M k^2 \\ & = M (h^2 + 2|h| |k| + k^2) = M (|h| + |k|)^2 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{1}{2} \frac{M (|h| + |k|)^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

が成立する。 $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta$ とおくと, $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ となるとき $r \rightarrow 0$ となる。

$$\frac{(|h| + |k|)^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{(r|\cos \theta| + r|\sin \theta|)^2}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} = \frac{r^2 (|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2}{r} = r (|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2$$

より $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h, k)| = 0$ が得られる。これより $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立する。

(2) $\varepsilon(h, k) = \frac{f(x + h, y + k) - \left(f(x, y) + Df(x, y) + \frac{1}{2!} D^2 f(x, y) \right)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^2}$ とおくと, テーラーの定理より

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) (\sqrt{h^2 + k^2})^2 &= R_3 = \frac{1}{3!} D^3(x + \theta h, y + \theta k) \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 h^{3-j} k^j {}_3C_j \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} \partial y^j}(x + \theta h, y + \theta k) \end{aligned}$$

となる。 $M_j = \max \left\{ \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} \partial y^j}(x + \theta h, y + \theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ($j = 0, 1, 2, 3$), $M = \max \{ M_0, M_1, M_2, M_3 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| (\sqrt{h^2 + k^2})^2 &\leq \frac{1}{3!} D^3(x + \theta h, y + \theta k) \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 \left| h^{3-j} k^j {}_3C_j \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} \partial y^j}(x + \theta h, y + \theta k) \right| \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{j=0}^3 |h^{3-j}| |k^j| {}_3C_j \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-j} \partial y^j}(x + \theta h, y + \theta k) \right| \\ &\leq \frac{M}{3!} \sum_{j=0}^3 {}_3C_j |h^{3-j}| |k^j| = \frac{M}{3!} (|h| + |k|)^3 \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \frac{M}{3!} \frac{(|h| + |k|)^3}{h^2 + k^2}$$

が成立し, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h,k)| = 0$ が得られる。これより $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立する。

$$(3) \quad \varepsilon(h,k) = \frac{f(x+h, y+k) - \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} D^j f(x,y) \right)}{(\sqrt{h^2+k^2})^n} \quad \text{とおくと, テーラーの定理より}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(h,k) \left(\sqrt{h^2+k^2} \right)^n &= R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}(x+\theta h, y+\theta k) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}C_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(x+\theta h, y+\theta k) \end{aligned}$$

となる。 $M_j = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(x+\theta h, y+\theta k) \right| \mid 0 \leq \theta \leq 1 \right\}$ ($j = 0, 1, \dots, n+1$),
 $M = \max \{ M_j \mid j = 0, 1, \dots, n+1 \}$ とおくと

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h,k)| \left(\sqrt{h^2+k^2} \right)^n &\leq \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}(x+\theta h, y+\theta k) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \left| h^{n+1-j} k^j {}_{n+1}C_j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(x+\theta h, y+\theta k) \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} |h^{n+1-j}| |k^j| {}_{n+1}C_j \left| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} y^j}(x+\theta h, y+\theta k) \right| \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} {}_{n+1}C_j |h^{n+1-j}| |k^j| = \frac{M}{(n+1)!} (|h|+|k|)^{n+1} \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$|\varepsilon(h,k)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \frac{(|h|+|k|)^{n+1}}{(\sqrt{h^2+k^2})^n}$$

が成立し, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |\varepsilon(h,k)| = 0$ が得られる。これより $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立する。