解析学 I 問題解説 #10

河野

演習問題 *3.1

(1) $I_n = \displaystyle\int \cos^n t\,dt$ とする。$\cos^n t = \cos^{n-2} t \cos^2 t = \cos^{n-2} t\left(1-\sin^2 t\right)$ を持ちいることにより漸化式

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を示せ。

(2) $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$ とする。$x = a\tan t$ とおくことにより

$$J_n = \frac{1}{a^{2n-1}} I_{2n-2}$$

が成立することを示せ。

(3)

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left\{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right\}$$

が成立することを示せ。

(1)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \cos^n t\,dt = \int \cos^{n-2} t\left(1-\sin^2 t\right)\,dt = \int \cos^{n-2} t\,dt - \int \cos^{n-2} t \sin^2 t\,dt \\
&= I_{n-2} - \int \cos^{n-2} t \sin^2 t\,dt = I_{n-2} - \int \cos^{n-2} t \sin t \cdot \sin t\,dt \\
&= I_{n-2} - \int \left(-\frac{1}{n-1}\cos^{n-1} t\right)' \sin t\,dt \\
&= I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} t \sin t - \int \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} t \cos t\,dt \\
&= I_{n-2} + \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} t \sin t - \frac{1}{n-1} I_n
\end{aligned}$$

より

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

が従う。

(2) $x = a\tan t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{\cos^2 t}$ である。また

$$x^2 + a^2 = a^2\tan^2 t + a^2 = a^2\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1\right) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

となるので,

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \left(\frac{\cos^2 t}{a^2}\right)^n \frac{dx}{dt}\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{\cos^2 t}{a^2} \right)^n \frac{a}{\cos^2 t}\, dt = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2n-2}\, dt \\
&= \frac{1}{a^{2n-1}} I_{2n-2}
\end{aligned}
$$

となる。

(3)

$$
\begin{aligned}
J_{n+1} &= \frac{1}{a^{2n+1}} I_{2n} = \frac{1}{a^{2n+1}} \left(\frac{1}{2n} \cos^{2n-1} t \sin t + \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \right) \\
&= \frac{1}{2na^{2n+2}} \cos^{2n} t \cdot a \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{a^{2n+1}} \frac{2n-1}{2n} a^{2n-1} J_n \\
&= \frac{1}{2na^{2n+2}} \left(\frac{a^2}{x^2+a^2} \right)^{2n} a \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{a^{2n+1}} \frac{2n-1}{2n} a^{2n-1} J_n \\
&= \frac{1}{2na^2} \left(\frac{1}{x^2+a^2} \right)^{2n} x + \frac{1}{a^2} \frac{2n-1}{2n} J_n \\
&= \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) J_n \right)
\end{aligned}
$$

となる。

演習問題 3.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　(2) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$　(3) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

(4) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$　(5) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$　(6) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$　(8) $\dfrac{1}{x^3+1}$　(9) $\dfrac{1}{x^4+1}$

不定積分は結果が得られたときその正誤をチェックすることは易しい。即ち，結果の関数を微分して被積分関数になればよい。よって結果の関数を書くことはしない。どのような方法で解いていくかということのみ述べる。

(1) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$ と部分分数展開する。

(2) 問題 (2) を追加したのに解説の方は追加されていませでした。(2) 以降は解説の番号を 1 つずらしました。$\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1}$ と部分分数展開する。

(3) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{(x-1)^2}$ とするか，直接 $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$ と部分分数展開する。

(4) 分子の次数の方が高いので割り算をした後で，$\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$ と部分分数展開する。

(5) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ と因数分解できるので，$\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}$ と部分分数展開する。$\dfrac{x}{x^2+1}$ は $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}$ と見て積分し，$\dfrac{1}{x^2+1}$ は $x = \tan t$ とおき，置換積分して求める。

(6)　プリント (3.2 節 (4)) にある様に部分積分を用いて $\dfrac{1}{x^2+1}$ の積分に帰着させます。色々な方法があるので，自分で考えてみるのも力をつける 1 つの方法です。自力で解ければ，かなり「積分力」がついていると思われます。

(7)　$\dfrac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}$ と $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ の定数倍の和に分ける。後者は $\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$ と見て $u = x+1$ とおき置換積分する。その形を見れば次に何をすればよいかが分かります。

(8)　$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解できるので，$\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$ と部分分数展開する。後者は (7) と同様に $\dfrac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}$ と $\dfrac{1}{x^2-x+1}$ の定数倍の和の形に分ける。$\dfrac{1}{x^2-x+1}$ は $\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ と変形して置換積分，更にもう一度置換積分する。

(9)　これは因数分解が問題。$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ と因数分解できる。$\dfrac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ と部分分数展開して，後は前問までと同様に計算する。

前回の解説に書いたことをもう一度書いておく。不定積分は結果が得られたときその正誤をチェックすることは易しい。即ち，結果の関数を微分して被積分関数になればよい。よって結果の関数を書くことはしない。どのような方法で解いていくかということのみ述べる。

演習問題 3.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x \cos x$　　(2) $\sin^3 x$　　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　　(6) $\dfrac{1}{\sin x - \cos x}$

(1)　**三角関数は積の形になっているときは和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。**この場合は和を積に直すことは倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ を適応することに対応する。

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$

(2)　和を積に直すことを 2 回実行すれば得られる。直接 3 倍角の公式を適応する方法でもよい。また $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ と見て $u = \cos x$ と変数変換してもできる。

(3)　$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

(4)　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ なので $t = \sin x$ とおき置換積分を実行する。

(5)　$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

(6)　$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$　(5) $\sqrt{a^2-x^2}$　$(a>0)$

ここでは三角関数を用いる方法で積分を求めているが，無理関数を用いる方法で求めても勿論よい。

(1)　$\sqrt{2-3x^2}=\sqrt{3\left(\dfrac{2}{3}-x^2\right)}=\sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2-x^2}$ と変形できるので $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin t$ とおき置換積分を実行する。

(2)　$3+2x-x^2=4-x^2+2x-1=2^2-(x-1)^2$ となるので $u=x-1$ とおくと積分は

$$\int\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,du$$

となるので $u=2\sin t$ とおいて置換積分を実行する。

(3)　$\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-\dfrac{2}{3}\right)}=\sqrt{3}\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)}$ と変形できるので $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{1}{\sin t}$ とおい置換積分を実行する。

(4)　$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ なので $u=x+\dfrac{1}{2}$ とおくと積分は

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{1}{u^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du$$

となる。$u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ とおいて置換積分を実行する。

(5)　$x=a\sin t$ とおいて置換積分を実行する。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　(3) $\sqrt{x^2+a}$

(4) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$

(1)　$\sqrt{a^2-x^2}=t(x+a)$ または同じことだが $t=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ とおいて置換積分を実行する。

(2)　$\sqrt{x^2+a^2}=t-x$ とおいて置換積分を実行する。

(3)　$\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおいて置換積分を実行する。

(4)　$\sqrt{a^2-x^2}=t(x+a)$ または同じことだが $t=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ とおいて置換積分を実行する。

演習問題 3.6　今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を

身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

(4) $x \arcsin x$ (5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$ (6) xe^{-x}

(7) $x \cos x$ (8) $x^2 \sin x$ (9) e^{3x+1}

(10) $2x \arctan x$ (11) $\log(2x+1)$ (12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$

(13) $x^2 \log x$ (14) xe^{2x^2+3} (15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x$

(16) $\arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ (17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$ (18) $\cos^n x \sin x$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$ (20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$ (21) $\dfrac{x \arcsin x}{(1+x^2)^2}$

(22) $\sin(\log x)$ (23) $x^3 e^x$ (24) $x^4 e^x$

(25) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ (26) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (27) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$

(28) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ (29) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$ (30) $\dfrac{1}{\sin x \cos^5 x}$

(31) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ (32) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$ (33) $\dfrac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$

(34) $\dfrac{1}{3+\cos x}$ (35) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ (36) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (38) $\sqrt{x^2-1}$ (39) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(40) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ (41) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ (42) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

(43) $\dfrac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$ (44) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$ (45) $\dfrac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

(46) $\dfrac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$ (47) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ (48) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(49) $\dfrac{1}{4+x^2}$ (50) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ (51) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(52) $3x^2 e^{x^3+1}$ (53) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$ (54) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(55) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$ (56) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$ (57) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(58) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$ (59) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$ (60) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(61) $\dfrac{\sin x \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ (62) $\dfrac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$ (63) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x}$

(64) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (65) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ (66) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$

(67) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ (68) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ (69) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$

(70) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (71) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$ (72) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$

(73) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ (74) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$ (75) $\dfrac{12}{x^3-8}$

(76) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ (77) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$ (78) $\sin 4x$

(79) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$ (80) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ (81) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(82) $\log(1+\sqrt{x})$ (83) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$ (84) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$

(85) $3x^2(x^3+5)^6$ (86) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$ (87) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(88) $e^{ax}\cos bx$ (89) $e^{ax}\sin bx$

問題が長いのでヒントの前に被積分関数をもう一度書いておきます。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$：いきなり「ルートのなかの 2 次式」を解く方法でやってもできますが，$\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ と変形してから考えたほうが簡単かもしれない。

(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$：三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方ですが，この場合は加法定理の形そのものです。

(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$：$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$ と見ると ，$u = 1+x^2$ と置けばよいことに気づくでしょう。

(4) $x\arcsin x$：部分積分法。

(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$：一般的な形を後の (88) で考えます。

(6) xe^{-x}：部分積分法。

(7) $x\cos x$：部分積分法。

(8) $x^2\sin x$：部分積分法 2 回。

(9) e^{3x+1}：これはどう置けばよいか分かっているでしょう。簡単な置換積分法。

(10) $2x\arctan x$：部分積分法。

(11) $\log(2x+1)$：簡単な置換積分法 + 部分積分法。

(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$：$\dfrac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)'\dfrac{1}{(\log x)^n}$ と考えると　。

(13) $x^2 \log x$：部分積分法。

(14) xe^{2x^2+3}：置換積分法です。

(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x$：一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって　。

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$：この様な問題の場合試行錯誤でやるしかありません。色々な置き方を試してうまくいくものを探します。まず思いつくのは $t = \dfrac{x}{x+1}$ とおくことでしょう。しかしこれを実行すると (各自計算してみること)，$\displaystyle\int \frac{2t}{(1-t^2)^2}\arcsin\sqrt{t}\,dt$ となりこの積分は難しそうです。そこで $t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\displaystyle\int t\frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,dt$ となります。$(\tan^2 t)' = \dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$ に気が付くと部分積分を実行して　。

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$：$(2x+1)\sin(x^2+x+1) = (x^2+x+1)'\sin(x^2+x+1)$ なので　。

(18) $\cos^n x \sin x$：$\cos^n x \sin x = -\cos^n x(\cos x)'$ なので　。

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$：部分積分法 2 回。

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$：(16) で述べたように，どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかありません。でもこの場合 $\arcsin x$ を消すという考え方でも「ルートの中の 2 次式」という見方からも次のようにおくのは，少し積分に慣れれば気がつくと思います。つまりここを見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえます。$t = \arcsin x$ とおき，$\displaystyle\int \frac{t}{\cos^2 t}dt = \int t(\tan t)'dt$ と変形してから部分積分。

(21) $\dfrac{x\arcsin x}{(1+x^2)^2}$：$t = \arcsin x$ とおき，$\displaystyle\int t\left(-\frac{1}{2(1+\sin^2 t)}\right)'dt$ と変形して部分積分。

(22) $\sin(\log x)$：$t = \log x$ とおき $\displaystyle\int e^t \sin t\,dt$ と変形。(89) 参照。

(23) $x^3 e^x$：部分積分。

(24) $x^4 e^x$：部分積分。

(25) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$：因数分解が問題です。やり方は以前やった x^4+1 と同じで，$x^4+3x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2-x^2$ と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して　。

(26) $\dfrac{1}{1+x^2}$ ：$x=\tan t$ と置換積分。

(27) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$ ：$\dfrac{Ax+B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x^2+1}$ と部分分数展開するか，$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x^2+1}$ と部分分数展開。

(28) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。三角関数を用いる方法，無理式を用いる方法のどちらでもできますが，計算の難度は異なります。

(29) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$ ：$I_n=\displaystyle\int\frac{1}{\cos^n x}dx$ とおき漸化式を求める。

$$\begin{aligned} I_n &= \int\left\{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^n x}\right\}dx = I_{n-2}+\int \sin x\left(\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}x}\right)' dx \\ &= \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}} \end{aligned}$$

これを繰り返し適用すれば求まる。

(30) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$ ：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいても計算できるが計算が複雑になるので，他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は $t=\tan x$ とおいた方が計算は簡単です。一般に $\sin x$ と $\cos x$ の偶数乗，例えば $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x\cos x$ などは $\tan x$ で表すことができます。$t=\tan x$ とおくと $I=\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos^5 x}\cos^2 x\,dt=\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}dt$ となる。$\sin x\cos x=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\dfrac{\frac{\sin x\cos x}{\cos^2}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{t}{1+t^2}$，$\cos^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}$ となるので $I=\displaystyle\int\frac{(1+t^2)^2}{t}dt$ となる。

(31) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$ ：これは $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくしかないようですね。

(32) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$ ：t=$a-x$ とおくと 。

(33) $\dfrac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$ ：$t=\sqrt{a+bx^3}$ とおくと $I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int\frac{bt^4}{t^2-a}dt$ となるので 。(この置換積分では講義ではとりあげていません。)

(34) $\dfrac{1}{3+\cos x}$ ：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

(35) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$ ：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

(36) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$ ：$t=e^x$ とおくと，$\displaystyle\int\frac{t^3}{(t^2+1)^4}dt$ となる。$\dfrac{t^3}{(t^2+1)^4}=\dfrac{t^3+t}{(t^2+1)^4}-\dfrac{t}{(t^2+1)^4}=\dfrac{t}{(t^2+1)^3}-\dfrac{t}{(t^2+1)^4}$ なので 。

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。

(38) $\sqrt{x^2-1}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。

(39) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。

(40) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。

(41) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。

(42) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{x^2+2x-1}=t(x+1+\sqrt{2})$ とおくと，$I=-2\displaystyle\int\dfrac{t}{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}t^2}\,dt$ となるので 。

(43) $\dfrac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{1+x^2}=t-x$ とおくと，$I=\displaystyle\int\dfrac{t^2+1}{t^4+4t^2-1}\,dt$ となるので 。

(44) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{x^2+2}=t-x$ とおくと 。

(45) $\dfrac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{1-x^2}=t-x$ とおくと，$I=-\displaystyle\int\dfrac{3t^2-1}{(5t^2+1)(1+t^2)}dt$ となるので 。

(46) $\dfrac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$\sqrt{3+4x^2}=t-2x$ とおくと，$I=-8\displaystyle\int\dfrac{t}{3t^4-82t^2+9}dt$ となるので 。

(47) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$x=a\tan t$ とおくと，$I=\dfrac{1}{a^4}\displaystyle\int\dfrac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$ となるので $u=\sin t$ とおくと 。

(48) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$ ：$t=\sqrt{1+x^6}$ とおくと 。

(49) $\dfrac{1}{4+x^2}$ ：これは基本です。$x=2\tan t$ とおくと

(50) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ：$t=\sqrt[3]{x+1}$ とおくと 。

(51) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ ：これは有理関数の積分の典型です。部分分数展開して 。

(52) $3x^2e^{x^3+1}$ ：典型的な置換積分。慣れてきた人は見ただけで分かると思います。

(53) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$ ：これは有理関数の積分の典型です。

(54) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$ ：これも有理関数の積分の典型です。ただし部分分数展開の後 $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ の積分が出てくるので，プリントに書いてある方法で分母の次数を下げる変形が必要になります。

(55) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$ ：$\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^3}$ と部分分数展開する。$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ 等を分母の次数を下げて計算するので，プリントに書いてある方法で分母の次数を下げる変形が必要になります。

(56) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$ ：これも有理関数の積分の典型です。分母を因数分解して　。

(57) $\dfrac{3}{x^3-1}$ ：これも有理関数の積分の典型です。

(58) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$ ：$t=e^x$ とおくと，$I=\displaystyle\int\frac{1}{t^2+3t+4}dt$ となるので　。

(59) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$ ：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいてもできるが (30) で述べた方法でできる。$t=\tan x$ とおくと

(60) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ ：$t=e^x$ とおくと　。

(61) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ ：(30) の方法でもできるが，$-(\cos x)'\dfrac{\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ と $\sin^4 x$ が $\cos x$ で表されることに注意する。$t=\cos x$ とおくと，$I=-\displaystyle\int\frac{t}{2t^4-2t^2+1}dt$ となるので　。

(62) $\dfrac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$ ：(30) と同様に変数変換。$t=\tan x$ とおく。a,b の符号による場合分けが必要になる。

(63) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x}$ ：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと　。

(64) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ：$t=\sqrt{1-x}$ とおくと　。

(65) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ ：$t=\sqrt{x}$ とおくと　。

(66) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$ ：$t=\tan x$ とおくと　。

(67) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ ：「ルートの中の 2 次式」

(68) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$ ：$\dfrac{\cos x}{\sin^n x}=\dfrac{(\sin x)'}{\sin^n x}$ と見て　。

(69) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$ とおくと　。

(70) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$：「ルートの中の 2 次式」

(71) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$：$\dfrac{\log(\log x)}{x}=(\log x)'\log(\log x)$ なので $t=\log x$ とおくと　。

(72) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$：$\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ と見て $t=a^3+x^3$ とおくと　。

(73) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$：$t=\sqrt{1-x}$ とおくと　。

(74) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$：$t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ とおくと　。

(75) $\dfrac{12}{x^3-8}$：有理関数の積分。

(76) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと　。

(77) $\dfrac{1}{a+b\sin x}$：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと　。場合分けが必要になる。

(78) $\sin 4x$：簡単な置換積分。

(79) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$：$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと　。

(80) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$：$t=\arctan x$ とおき，$I=\displaystyle\int t(\tan t-t)'dt$ 変形して部分積分。

(81) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$：$\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}=-\dfrac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$ と見る。$\tan^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ は cos で表されるので $t=\cos x$ とおくと　。

(82) $\log(1+\sqrt{x})$：$t=\sqrt{x}$ とおくと　。

(83) $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$：$t=\sqrt{1+x}$ とおくと $\displaystyle\int\frac{1+t}{1-\sqrt{t^2-1}}2t\,dt$ となる。さらに $\sqrt{t^2-1}=s-t$ とおくと $\displaystyle\int\frac{(s+1)^2(s^2-1)}{s^2(1+2s-s^2)}\,ds$ となり，有理関数の積分に帰着できる。

(84) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$：$t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくと積分は

$$-4\int\frac{1}{1+t^2}\,dt+4\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

となる。

(85) $3x^2(x^3+5)^6$：展開して計算しても勿論できますが，$t=x^3+5$ とおくと　。

(86) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{2+x-x^2}=t(2+x)$ とおくと　。

(87) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$：いきなり置換積分してもよいが，$\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}$ と変形してから置換積分する方法もある。

(88) $e^{ax}\cos bx$：

(89) $e^{ax}\sin bx$：2 つまとめて考える。

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

とおく。部分積分を行うことにより

$$I_1 = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2$$

を得る。同様に

$$I_2 = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx + \frac{b}{a}I_1$$

が分かるので，連立方程式を解いて

$$I_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\big(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx\big), \quad I_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\big(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx\big)$$