解析学 I 問題解説 #12

河野

演習問題 4.3　命題 4.5 を証明せよ。

演算子を
$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$
し，微分方程式を
$$Ly = 0 \tag{1}$$
とする。微分の線型性より $D(ay) = aDy$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(ay) = D\left(D(ay)\right) = D\left(aDy\right) = aD\left(Dy\right) = aD^2y$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(ay) = aD^ky$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
L(ay) &= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)(ay) \\
&= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay) \\
&= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y \\
&= a\left(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y\right) \\
&= a\left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y \\
&= aLy
\end{aligned}$$

が成立する。よって y が線型微分方程式 (1) の解ならば ay も (1) の解である。

微分の線型性より $D(y_1+y_2) = Dy_1 + Dy_2$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(y_1+y_2) = D\left(D(y_1+y_2)\right) = D\left(Dy_1+Dy_2\right) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(y_1+y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}
L(y_1+y_2) &= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)(y_1+y_2) \\
&= a_n(x)D^n(y_1+y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1+y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1+y_2) + a_0(x)(y_1+y_2) \\
&= a_n(x)\left(D^ny_1 + D^ny_2\right) + a_{n-1}(x)\left(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2\right) + \cdots + a_1(x)\left(Dy_1 + Dy_2\right) + a_0(x)\left(y_1+y_2\right) \\
&= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1 \\
&\qquad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2 \\
&= \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y_1 \\
&\qquad + \left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)\right)y_2 \\
&= Ly_1 + Ly_2
\end{aligned}$$

が成立する。よって y_1 および y_2 が線型微分方程式 (1) の解ならば y_1+y_2 も (1) の解である。

演習問題 4.4　次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

(1) $y' + y\sin x = 0$
(2) $y' + (x+1)y = 0$
(3) $y' + e^{2x}y = 0$
(4) $y'' - 5y' + 6y = 0$
(5) $y'' - y' - 6y = 0$
(6) $y'' + y = 0$
(7) $y'' + 4y = 0$
(8) $y'' - 2y' + y = 0$
(9) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(1)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x$ より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から $e^{-\cos x}$ をかけると

$$D\bigl(e^{-\cos x}\bigr)y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\cos x}y = C$$

となるので

$$y = Ce^{\cos x}$$

である。

(2)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x+1))y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int (x+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x+1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\right) y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = C$$

となるので

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。

(3)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。$\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると

$$D\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = C$$

となるので

$$y = C\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。

(4)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - 5D + 6 = (D-3)(D-2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D-2)y = 0$ となる。$u = (D-2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x}De^{-2x} = D - 2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{2x}De^{-2x}y = C_1e^{3x}$ となるが，両辺に左から e^{-2x} をかけると $De^{-2x}y = C_1e^{x}$ となる。両辺を積分すると $e^{-2x}y = C_1e^{x} + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

となる。

(5)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - D - 6 = (D-3)(D+2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D+2)y = 0$ となる。$u = (D+2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D + 2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y = C_1e^{3x}$ となるが，両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}y = C_1e^{5x}$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}y = \dfrac{C_1}{5}e^{5x} + C_2$ となるので $y = \dfrac{C_1}{5}e^{3x} + C_2e^{-2x}$ となる。$\dfrac{C_1}{5}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

となる。

(6)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 + 1 = (D-i)(D+i)$ なので微分方程式は $(D-i)(D+i)y = 0$ となる。$u = (D+i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-i)u = 0$ となる。

$$e^{ix}De^{-ix} = D - i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{ix}De^{-ix}u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-ix} をかけると $De^{-ix}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-ix}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+i)y = C_1 e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix} D e^{ix} = D + i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-ix} D e^{i} y = C_1 e^{ix}$ となるが，両辺に左から e^{ix} をかけると $De^{ix} y = C_1 e^{2ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{ix} y = \dfrac{C_1}{2i} e^{2ix} + C_2$ となるので $y = \dfrac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ となる。$\dfrac{C_1}{2i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。

(7) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 + 4 = (D-2i)(D+2i)$ なので微分方程式は $(D-2i)(D+2i)y = 0$ となる。$u = (D+2i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-2i)u = 0$ となる。

$$e^{2ix} D e^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{2ix} D e^{-2ix} u = 0$ となるが，両辺に左から e^{-2ix} をかけると $De^{-2ix} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-2ix} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{2ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2i)y = C_1 e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix} D e^{2ix} = D + 2i$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2ix} D e^{2ix} y = C_1 e^{2ix}$ となるが，両辺に左から e^{2ix} をかけると $De^{2ix} y = C_1 e^{4ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{2ix} y = \dfrac{C_1}{4i} e^{4ix} + C_2$ となるので $y = \dfrac{C_1}{4i} e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$ となる。$\dfrac{C_1}{4i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$$

となる。

(8) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。$D^2 - 2D + 1 = (D-1)(D-1)$ なので微分方程式は $(D-1)(D-1)y = 0$ となる。$u = (D-1)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-1)u = 0$ となる。

$$e^{x} D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので，微分方程式は $e^xDe^{-x}u=0$ となるが，両辺に左から e^{-x} をかけると $De^{-x}u=0$ となる。両辺を積分すると $e^{-x}u=C_1$ となるので

$$u=C_1e^x$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-1)y=C_1e^x$$

となる。

$$e^xDe^{-x}=D-1$$

が成立するので，微分方程式は $e^xDe^{-x}y=C_1e^x$ となるが，両辺に左から e^{-x} をかけると $De^{-x}y=C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{-x}y=C_1x+C_2$ となるので一般解は

$$y=C_1xe^x+C_2e^x$$

となる。

(9) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2+4D+4)y=0$$

と書き直すことができる。$D^2+4D+4=(D+2)(D+2)$ なので微分方程式は $(D+2)(D+2)y=0$ となる。$u=(D-2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+2)u=0$ となる。

$$e^{-2x}De^{2x}=D+2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}u=0$ となるが，両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}u=0$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}u=C_1$ となるので

$$u=C_1e^{-2x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D+2)y=C_1e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x}=D+2$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y=C_1e^{-2x}$ となるが，両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}y=C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}y=C_1x+C_2$ となるので一般解は

$$y=C_1xe^{-2x}+C_2e^{-2x}$$

となる。

演習問題 4.5　次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y''+y=0$　(2) $y''+\omega^2y=0 \quad (0\neq\omega\in\mathbb{R})$

(3) $y''-y'+y=0$　(4) $y''-2y'+2y=0$

(1) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。$y_1 = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$ および $y_2 = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$ は微分方程式の解であり，実数値関数である。

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

が一般解であることを示す。

$A = \left\{ y \,\middle|\, (D^2+1)y = 0, \text{y は実数値関数} \right\}$，$B = \{ C_1 \cos x + C_2 \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$ とする。y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ と書くことができる。$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ なので

$$y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり，$B \subseteq A$ となる。$y \in A$ を任意の元とするとき，$z = y(0)\cos x + y'(0)\sin x$ とおくと，

$$z(0) = y(0)\cos 0 + y'(0)\sin 0 = y(0)$$

であり，

$$z'(0) = -y(0)\sin 0 + y'(0)\cos 0 = y'(0)$$

となる。y, z はともに微分方程式 $(D^2+1)y = 0$ の解であり，$y(0) = z(0)$，$y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり，$A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

(2) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。$y_1 = \dfrac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} = \cos \omega x$ および $y_2 = \dfrac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} = \sin \omega x$ は微分方程式の解であり，実数値関数である。

$$C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

が一般解であることを示す。

$A = \left\{ y \,\middle|\, (D^2+\omega^2)y = 0, \text{y は実数値関数} \right\}$，$B = \{ C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$ とする。y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ と書くことができる。$y'' = -C_1 \omega^2 \cos x - C_2 \omega^2 \sin x$ なので

$$y'' + \omega^2 y = -C_1 \omega^2 \cos x - C_2 \omega^2 \sin x + \omega^2 (C_1 \cos x + C_2 \sin x) = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり，$B \subseteq A$ となる。$y \in A$ を任意の元とするとき，$z = y(0)\cos \omega x + \dfrac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x$ とおくと，

$$z(0) = y(0)\cos 0 + \frac{y'(0)}{\omega} \sin 0 = y(0)$$

であり，

$$z'(0) = -\omega y(0)\sin 0 + \frac{y'(0)}{\omega}\omega\cos 0 = y'(0)$$

となる。y, z はともに微分方程式 $(D^2+\omega^2)y=0$ の解であり，$y(0)=z(0)$，$y'(0)=z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y=z$ となる。よって $y\in B$ であり，$A\subseteq B$ が成立する。以上により $A=B$ が示された。

(3) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$y_1=\frac{\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+\exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}{2}=\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{および}$$

$$y_2=\frac{\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)-\exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}{2i}=\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は微分方程式の解であり，実数値関数である。

$$C_1\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

が一般解であることを示す。$A=\left\{y \,\middle|\, (D^2-D+1)y=0, \text{y は実数値関数}\right\}$，
$B=\left\{C_1\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \,\middle|\, C_1, C_2\in\mathbb{R}\right\}$ とする。y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y=C_1\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ と書くことができる。

$$\begin{aligned}y' =&C_1\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-C_1\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\\&+C_2\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'' =&-C_1\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-C_1\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\\&-C_2\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\frac{\sqrt{3}}{2}\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\end{aligned}$$

なので

$$y''-y'+y=0$$

が成立する。よって $y\in A$ であり，$B\subseteq A$ となる。

$y \in A$ を任意の元とするとき，

$$z = y(0)\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}y'(0) - \frac{1}{\sqrt{3}}y(0)\right)\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

とおくと，y, z はともに微分方程式 $(D^2 - D + 1)y = 0$ の解であり，$y(0) = z(0)$，$y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり，$A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

(4) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$C_1 \exp\left((1+i)\,x\right) + C_2 \exp\left((1-i)\,x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$y_1 = \frac{\exp\left((1+i)\,x\right) + \exp\left((1-i)\,x\right)}{2} = e^x \cos x \quad \text{および}$$
$$y_2 = \frac{\exp\left((1+i)\,x\right) - \exp\left((1-i)\,x\right)}{2i} = e^x \sin x$$

は微分方程式の解であり，実数値関数である。

$$C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

が一般解であることを示す。$A = \left\{ y \,\middle|\, (D^2 - 2D + 2)y = 0, \text{y は実数値関数} \right\}$，
$B = \left\{ C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とする。y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ と書くことができる。このとき

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり，$B \subseteq A$ となる。

$y \in A$ を任意の元とするとき，

$$z = y(0)e^x \cos x + \left(y'(0) - y(0)\right) e^x \sin x$$

とおくと，y, z はともに微分方程式 $(D^2 - 2D + 2)y = 0$ の解であり，$y(0) = z(0)$，$y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり，$A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

演習問題 4.6　次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり，$\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

$\varphi(t)=0$ の 2 解を α, β とすると $\varphi(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$ が成立する。このとき

$$D^2+aD+b=(D-\alpha)(D-\beta)$$

が成立する。$u=(D-\beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D-\alpha)u=0$$

となる。$e^{\alpha x}De^{-\alpha x}=D-\alpha$ より $e^{\alpha x}De^{-\alpha x}u=0$ となるが，両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $De^{-\alpha x}u=0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x}u=C_1$ となるので

$$u=C_1e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D-\beta)y=C_1e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x}De^{-\beta x}=D-\beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta}De^{-\beta x}y=C_1e^{\alpha x}$ となるが，両辺に左から $e^{-\beta}$ をかけると

$$De^{-\beta x}y=C_1e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。$\alpha\neq\beta$ のときは両辺を積分すると

$$e^{-\beta x}y=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)x}+C_2$$

となるのでとなる。

$$y=\frac{C_1}{\alpha-\beta}e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

$\dfrac{C_1}{\alpha-\beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha=\beta$ のときは $e^{(\alpha-\beta)x}=1$ なので両辺を積分すると

$$e^{-\alpha x}y=C_1x+C_2$$

となるので一般解は

$$y=C_1xe^{\alpha}+C_2e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 4.7　次が成立することを示せ。

$\varphi(t)=t^2+at+b=0$ は実数解を持たないとする。$\varphi(t)=0$ の複素解を $\lambda_1\pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2+aD+b)y=0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\varphi(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$ が成立する。ただしここで $\alpha = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\beta = \lambda_1 - i\lambda_2$ とする。このとき

$$D^2 + aD + b = (D-\alpha)(D-\beta)$$

が成立する。$u = (D-\beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D-\alpha)u = 0$$

となる。$e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが，両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $De^{-\alpha x}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D-\beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが，両辺に左から $e^{-\beta}$ をかけると

$$De^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\dfrac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

複素数値関数の解として

$$y_1 = e^{\alpha x} = e^{(\lambda_1 + i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x + i \sin \lambda_2 x)$$
$$y_2 = e^{\beta x} = e^{(\lambda_1 - i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x)$$

の 2 つがあるが，これから実数値関数 z_1, z_2 を

$$z_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x$$
$$z_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

を構成することができる。このとき

$$C_1 z_1 + C_2 z_2$$

が一般解であることを示す。

即ち $A = \left\{ y \,\middle|\, (D^2 + aD + b)y = 0, \text{y は実数値関数} \right\}$，$B = \{ C_1 z_1 + C_2 z_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$ とするとき $A = B$ を示す。

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= t^2 + at + b = (t-\alpha)(t-\beta) = t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\beta \\
&= t^2 - (\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_1 - i\lambda_2)t + (\lambda_1 + i\lambda_2)(\lambda_1 - i\lambda_2) = t^2 - 2\lambda_1 t + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)
\end{aligned}$$

より $a = -2\lambda_1$，$b = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ が成立している。y を B の任意の元とする。ある実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 z_1 + C_2 z_2$ とかかれている。

$$\begin{aligned}
y'' + ay' + y =& C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + aC_1 z_1' + aC_2 z_2' + bC_1 z_1 + bC_2 z_2 \\
=& C_1 \big((\lambda_1^2 - \lambda_2^2) e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \big) + C_2 \big((\lambda_1^2 - \lambda_2^2) e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x \big) \\
& + aC_1 \big(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \big) + aC_2 \big(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x \big) \\
& + bC_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + bC_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \\
=& C_1 \big(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + a\lambda_1 + b \big) e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_1 \big(-2\lambda_1 \lambda_2 - a\lambda_2 \big) e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \\
& + C_2 \big(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + a\lambda_1 + b \big) e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + C_2 \big(2\lambda_1 \lambda_2 + a\lambda_2 \big) e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x = 0
\end{aligned}$$

なので $y \in A$ が成立する。よって $B \subseteq A$ である。

$y \in A$ を任意の元とする。$C_1 = y(0)$，$C_2 = \dfrac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2}$，$z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ とおく。

$$z(0) = C_1 z_1(0) + C_2 z_2(0) = y(0) \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = y(0)$$

であり，

$$\begin{aligned}
z'(0) &= C_1 z'(0) + C_2 z_2'(0) \\
&= y(0)\lambda_1 + \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2} \lambda_2 = y'(0)
\end{aligned}$$

となる。y, z はともに微分方程式 $(D^2 + aD + b)y = 0$ の解であり，$y(0) = z(0)$，$y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり，$A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

演習問題 4.8　次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = x + 4$

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin x$　　(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$

(1)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x}De^{-3x}y = e^{2x}$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D\left(e^{-3x}\right)y = e^{-x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-3x}y = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 2)y = \sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D + 2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x}De^{2x}y = \sin x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D\left(e^{2x}\right)y = e^{2x}\sin x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{2x}y = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$$

となるので

$$y = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + Ce^{-2x}$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 3)y = x^2 + x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x}De^{3x} = D + 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x}De^{3x}y = x^2 + x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D\left(e^{3x}\right)y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{3x}y = \frac{1}{3}e^{3x}x^2 + \frac{1}{9}e^{3x}x - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となるので

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} + Ce^{-3x}$$

である。

(4)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = x+4$ となる。$u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = x+4$ となる。

$$e^{-x}De^{x} = D + 1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u = x+4$ となるが，両辺に左から e^x をかけると $De^xu = (x+4)e^x$ となる。両辺を積分すると $e^xu = xe^x + 3e^x + C_1$ となるので

$$u = x + 3 + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = x + 3 + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = x + 3 + C_1e^{-x}$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y = xe^{-3x} + 3e^{-3x} + C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{10}{9}e^{-3x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{9} - \dfrac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$ となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

(5)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = \sin x$ となる。$u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = \sin x$ となる。

$$e^{-x}De^{x} = D + 1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u=\sin x$ となるが，両辺に左から e^{x} をかけると $De^{x}u=e^{x}\sin x$ となる。両辺を積分すると $e^{x}u=\dfrac{1}{2}e^{x}\sin x-\dfrac{1}{2}e^{x}\cos x+C_1$ となるので

$$u=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+C_1e^{-x}$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y=\dfrac{1}{2}e^{-3x}\sin x-\dfrac{1}{2}e^{-3x}\cos x+C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y=\frac{1}{10}e^{-3x}\cos x-\frac{1}{5}e^{-3x}\sin x-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$$

となるので $y=\dfrac{1}{10}\cos x-\dfrac{1}{5}\sin x-\dfrac{C_1}{4}e^{-x}+C_2e^{3x}$ となる。$-\dfrac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y=\frac{1}{10}\cos x-\frac{1}{5}\sin x+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$$

となる。

(6)　与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2-2D-3)y=e^{2x}$$

と書き直すことができる。$D^2-2D-3=(D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y=e^{2x}$ となる。$u=(D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u=e^{2x}$ となる。

$$e^{-x}De^{x}=D+1$$

が成立するので，微分方程式は $e^{-x}De^{x}u=e^{2x}$ となるが，両辺に左から e^{x} をかけると $De^{x}u=e^{3x}$ となる。両辺を積分すると $e^{x}u=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C_1$ となるので

$$u=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x}=D-3$$

が成立するので，微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y=\dfrac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}$ となるが，両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y=\dfrac{1}{3}e^{-x}+C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y=-\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{C_1}{4}e^{-4x}+C_2$$

となるので $y = -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2 e^{3x}$ となる。$-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。