解析学 II 要綱 #1　　2009–4–13　　河野

1　1変数関数の定積分

解析学 I の不定積分の所でもふれたが，定積分は定義だけから見ると不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の間に関係が成立する事 (微積分の基本定理) が積分の理論的把握のキーポイントである。この事については定義の後にもう一度ふれる。

定積分の考え方は，古代ギリシアの時代から，多角形ではない図形の面積を求める方法として考察の対象であった。そのことを次の受験問題を例に考える。

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

(2003　東大・理系)

次の解答は円周率の値を知っていることを前提にしているので証明にはならない。

[間違った解答] 円周率を π とすると $\pi = 3.14$ なので $\pi = 3.14 > 3.05$ である。よって証明された。

解答を考える前提として「円周率」とはどういうものだったのかということを再確認しておく。古代ギリシア時代にすでに「円の面積は半径の 2 乗に比例する」ことが証明されていた。式で書くと，円の半径を r，半径 r の円の面積を S とすると，$S \propto r^2$ が成立する。このときこの比例式の比例定数を**円周率**といい，通常 π で表す(1)。このとき $S = \pi r^2$ となる。π の値がどれくらいかはこの定義から直接には分からない。

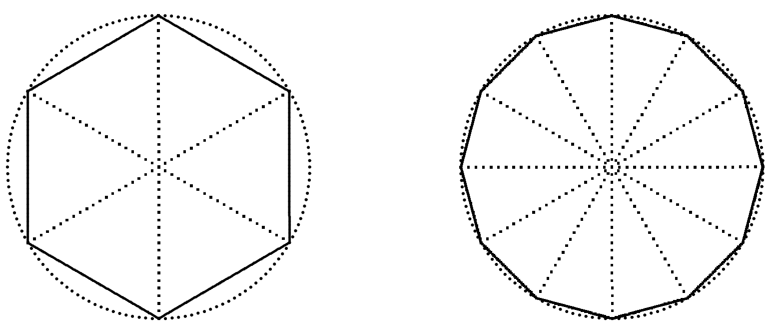

図 1.1

(1) 半径 r の円の円周の長さを L とするとき L は r に比例する。この比例定数の半分を円周率とするという定義も考えられるが，ここでは面積で考えることにする。

今半径 $r=1$ の円を考えると面積は $S=\pi$ である。図 1.1 左の様に円に内接する正 6 角形を考え，その面積を S_6 とすると

$$\pi > S_6$$

が成立している。正 6 角形は辺の長さが 1 の正 3 角形 6 個からできている。この正 3 角形の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ なので $S_6=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるので

$$\pi > 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

が得られる。この議論は間違ってはいないが結論は弱すぎる。

そこで次に，図 1.1 右の様に円に内接する正 12 角形を考え，その面積を S_{12} とすると

$$\pi > S_{12}$$

が成立している。正 12 角形は辺の長さが 1 でなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ の 2 等辺 3 角形 12 個からできている。この 2 等辺 3 角形の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}$ なので $S_{12}=12\times\dfrac{1}{4}=3$ となるので

$$\pi > 3$$

が得られる。この議論は間違ってはいないが結論はやはり弱すぎる。

そこで更に半径 1 の円に内接する正 24 角形を考え，その面積を S_{24} とすると

$$\pi > S_{24}$$

が成立している。正 24 角形は辺の長さが 1 でなす角が $\dfrac{\pi}{12}$ の 2 等辺 3 角形 24 個からできている。この 2 等辺 3 角形の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{12}$ である。ここで $\sin\dfrac{\pi}{12}$ を求める必要が生じる。この求め方はプリントの最後に書いてあるが，ここでは $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}$ であることを認めて議論を先に進めよう。$S_{24}=24\times\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ となるの。$\sqrt{2}>1.41$，$\sqrt{3}<1.74$ となるので

$$\pi > S_{24} > \frac{6\times 1.41}{1.74+1} = 3.087 > 3.05$$

が得られる。

問題は解決した。この方法は「周囲が線分ではない図形の面積を多角形で近似していく」考え方に基づいている。同様の方法で「上」から円周率を評価することもできる。半径 1 の円に外接する正 6 角形の面積を T_6 とする。正 6 角形は 6 個の正 3 角形からできているがこの 3 角形の面積は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である[(2)]。このとき

$$T_6 = 6\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} < 2\times 1.74 = 3.48$$

[(2)] 各自確かめよ。

となる。以上より

$$3.05 < \pi < 3.48$$

が分かる。

長方形や3角形などの多角形の面積の概念は，古代メソポタミアやエジプトではすでに知られていたようである。多角形以外の図形の面積を求める努力も古くからなされていた。理論的解明として文献で確認できる最古のものとしては古代ギリシャがある。古代ギリシャのアルキメデスは放物線と直線に囲まれた部分の面積を求めている。アルキメデスは最初に述べた様な考え方で

$$3.14 < \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} < 3.143$$

を得ている。

1.1 定義と性質

定積分もこれとほぼ同様の考えから出発している。最初にそのことを見てから定義をしよう。関数 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を考える。今 $f(x) > 0$ を仮定しておこう。この関数のグラフと x 軸，直線 $x = a$ 及び直線 $x = b$ で囲まれた部分の面積 S を求める事を考える。図 1.2 の様に縦に短冊形に分割する。関数のグラフより下にある短冊部分 (図 1.2 では実線部の短冊) の面積の和を $S_{下}$ とする。関数のグラフをすっぽり含む短冊部分 (図 1.2 では破線部と実線部を併せた短冊) の面積の和を $S_{上}$ とする。このとき

$$S_{下} \leqq S \leqq S_{上}$$

が得られる。ここで分割を細かくして行き，その極限を考える。$S_{下}$ の極限と $S_{上}$ の極限が一致すれば，それは S とも一致するので S が求まる。

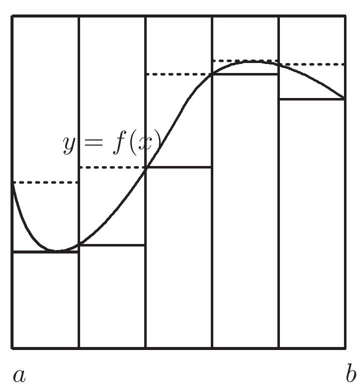

図 1.2

今述べたことをきちんと書けば定積分の定義になる。ただし $f(x) > 0$ の制限をはずす。ただしここでは定義は連続関数に対してのみ考える。連続でない一般の関数に対する定義はプリントの最後の方に書いてあるので参考に。

定義 1.1 [**連続な関数に対する定積分**] $y = f(x)$ を区間 $[a, b]$ で定義された**連続な**関数とする。区間 $[a, b]$ の**分割** Δ とは数の集合であり，$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ と書いたとき，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

を満たすものをいう。各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し，この小区間における関数 f の最大値を M_i，最小値を m_i と書く。即ち，$M_i = \max\{\, f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$，$m_i = \min\{\, f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$ とする。分割 Δ に対し $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ とする。また

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

とする (前の $S_{\text{下}}, S_{\text{上}}$ に対応するもの)。分割 Δ の最大幅を $\|\Delta\|$ とする。即ち

$$\|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n \,\}$$

である。$\|\Delta\| \to 0$ は分割が一様に細かくなる事を意味する。分割を一様に細かくしたときの $S(\Delta)$ の極限値と $s(\Delta)$ の極限値が一致するとき (連続の場合は一致することが証明されている)，即ち

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta)$$

となるとき，f は $[a, b]$ で **(定) 積分可能** (*integrable*) であるといい，この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

テキストの定義は定義 1.1 とは異なっているのでそれも紹介しておこう。2 つの定義は同値である事が分かる (命題 1.3)。

定義 1.2 [**連続な関数に対する定積分** (2)] f を区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数とする。分割等は定義 1.1 と同じとする。

各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し，この小区間から任意に点 c_i を選んでおく。

分割 Δ に対し $\Sigma(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ とおく。$\Sigma(\Delta; \{c_i\})$ は**リーマン和** (*Riemann sum*) と呼ばれる。分割を一様に細かくしていったとき，$\Sigma(\Delta; \{c_i\})$ が $\{c_i\}$ の選び方によらず同じ極限値に収束するとき f は $[a, b]$ で **(定) 積分可能** (*integrable*) であるという。この極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

定義 1.2 を見ると積分記号を現在の様に書くかが分かるかもしれない。

$$\Sigma(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \longmapsto \int_a^b f(x)dx$$

命題 1.3 $[a, b]$ で定義された関数 f が定義 1.1 の意味で積分可能なら定義 1.2 の意味でも積分可能であり，逆も成立する。積分可能のときそれぞれの極限値 ($\int_a^b f(x)dx$ と書かれたもの) は等しい。

略証

$$s(\Delta) \leqq \Sigma(\Delta; \{c_i\}) \leqq S(\Delta)$$

が成立するので，定義 4.1 の意味で積分可能のとき定義 4.2 の意味でも積分可能で値は等しい。

逆は少し細工が必要である。$\Sigma(\Delta; \{c_i\})$ がリーマン和 $s(\Delta)$ に十分近くなるように，c_i を取れる事が分かる[1]。同様にリーマン和 $\Sigma(\Delta; \{c_i'\})$ が $S(\Delta)$ に十分近くなるように c_i' が取れる事が分かる。結局任意の正数 ε に対し c_i, c_i' を適当に取ると

$$\Sigma(\Delta; \{c_i\}) - \varepsilon \leqq s(\Delta) \leqq S(\Delta) \leqq \Sigma(\Delta; \{c_i'\}) + \varepsilon$$

が成立する。ここで極限をとる。定義 1.2 の極限値を α と置くと

$$\alpha - \varepsilon \leqq \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta) \leqq \lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) \leqq \alpha + \varepsilon$$

が得られる。ε は任意だったので，

$$\alpha \leqq \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta) \leqq \lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) \leqq \alpha$$

が分かり定義 1.1 の意味でも，同じ極限値に収束する事が分かる。詳しくは参考文献[2]を参考の事。 ∎

例 1.4 $y = f(x) = x^2$ とし，定義域は $[0, 1]$ とする。$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めてみよう。

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

という計算法は**まだ使う事ができない**。定義から分かるように積分は定義では微分とは何ら関係がないからである。定義 1.1 に基づいて計算しよう。

分割は等分割としよう，即ち $\Delta_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ とする。$y = f(x) = x^2$ は単調増加なので，小区間 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ において最小値は $m_i = f\left(\frac{i-1}{n}\right)$，最大値は $M_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ である。よって

$$\begin{aligned} S_n = S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

となり，$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となるので $S_n \to \frac{1}{3}$ となる。また

$$\begin{aligned} s_n = s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

---

(1) 何故か?理由を考えよ。

(2) 高木貞治『解析概論』岩波，小平邦彦『解析入門』岩波

となり，$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となるので $s_n \to \dfrac{1}{3}$ となる。両極限は一致するので $y = f(x) = x^2$ は $[0, 1]$ で積分可能であり

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

となる。(高校時代にすでに学んでいる) 不定積分を使う方法に比べると，複雑であるし，求める関数ごとにそれに対応した和公式 (今の場合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$) が必要になる。しかし微積分学成立以前の求積方 (面積を求める方法) はこの様であった。

演習問題 1.1　次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

(1) $\displaystyle\int_0^1 x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

関数が連続でない場合も有界であれば積分が定義可能である。

定義 1.5 [**有界な関数に対する定積分**] $y = f(x)$ を区間 $[a, b]$ で定義された**有界な**関数とする。ここで有界な関数とはある実数 M が存在して，任意の x に対し $|f(x)| \leqq M$ となるものをいう。即ち関数の値がいくらでも大きくなったり，いくらでも小さくなったりしない関数である。

区間 $[a, b]$ の**分割** Δ とは数の集合であり，$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ と書いたとき，$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ を満たすものをいう。各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し，この小区間における関数 f の上限を M_i，下限を m_i と書く。即ち，$M_i = \sup\{\, f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$，$m_i = \inf\{\, f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \,\}$ とする。f が連続関数の場合はこれは小区間におるけ最大値・最小値にあたる。分割 Δ に対し $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ とする。また

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

とする (以前の $S_{\text{下}}, S_{\text{上}}$ に対応するもの)。分割 Δ の最大幅を $\|\Delta\|$ とする。即ち

$$\|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n \,\}$$

である。$\|\Delta\| \to 0$ は分割が一様に細かくなる事を意味する。分割を一様に細かくしたときの $S(\Delta)$ の極限値と $s(\Delta)$ の極限値が一致するとき，即ち

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(\Delta)$$

となるとき，f は $[a, b]$ で **(定) 積分可能** (*integrable*) であるといい，この極限値を

$$\int_a^b f(x) dx$$

と書く。

積分可能な関数として次のものが知られている。

定理 1.6

連続関数は有界閉区間で積分可能である。
単調関数は有界閉区間で積分可能である。

証明を理解するためには，$\varepsilon - \delta$ 法と呼ばれる極限の厳密な定義を理解していて，更に一様連続という概念を理解している必要があるので，講義では証明は省略する。テキストの補足 §1.6 I に「連続なら一様連続」の証明を除いて証明が書いてあるので参考に。

[$\sin\dfrac{\pi}{12}$ **の求め方**] 基本になるのは三角関数の加法定理と $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} &= 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} &= 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 \end{aligned}$$

が成立している。ここで $\cos^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ なので $\cos\dfrac{\pi}{12} = \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ となるが，$\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$ より $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ となる。ここで 2 重根号をはずす。$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ とおき 2 乗すると

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

となる。$a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$，$b = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ とおくと式は成立するので $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ となる。これを最初に式に代入すると $\dfrac{1}{2} = 2\sin\dfrac{\pi}{12}\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ となるので

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

となる。