

## 1.4 広義積分

積分の定義においては関数は有界であり、積分区間も有界な閉区間であった。ここではその制限をはずせる場合にはずし、積分の意味を拡張する。これらは**広義積分**と呼ばれる。

例から始めよう。関数  $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$  を  $x > 0$  の部分で考える。今 1 から  $M$  まで  $f$  を積分したものを  $I(M)$  とすると、

$$I(M) = \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

となる。ここで  $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx = 1$  となるので、 $\int_1^{\infty} f(x) dx = 1$  と書く事が許されるだろう。

関数  $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  を  $x > 0$  の部分で考える。今  $\varepsilon$  から 1 まで  $f$  を積分したものを  $J(\varepsilon)$  とすると、

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となる。ここで  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} J(\varepsilon) = 2$  となるので、 $\int_0^1 f(x) dx = 2$  と書く事が許されるだろう。

以上の例から次を定義する。幾つかの type があるが、最後に一般的な形を扱う。

### 定義 1.16

(1) 関数  $f$  は  $(a, b]$  で連続とする。  $I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  とおく。  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I(\varepsilon)$  が収束するとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  は収束する」という。

(2) 関数  $f$  は  $[a, b)$  で連続とする。  $I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  とおく。  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I(\varepsilon)$  が収束するとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  は収束する」という。

(3) 関数  $f$  は  $[a, \infty)$  で連続とする。  $I(M) = \int_a^M f(x) dx$  とおく。  $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M)$  が収束するとき

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分  $\int_a^\infty f(x) dx$  は収束する」という。

(4) 関数  $f$  は  $(-\infty, b]$  で連続とする。  $I(N) = \int_N^b f(x) dx$  とおく。  $\lim_{N \rightarrow -\infty} I(N)$  が収束するとき

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  は収束する」という。

(5) 関数  $f$  は有限個の点  $a_1, \dots, a_n$  を除いて  $(A, B)$  で連続とする。ただし  $A = -\infty, B = \infty$  の場合も含むとする。  $n + 1$  個の点  $c_0, c_1, \dots, c_n$  を  $c_0 < a_1 < c_1 < a_2 < \dots < a_n < c_n$  となる様にとる。次のすべての広義積分が収束するとき、広義積分  $\int_A^B f(x) dx$  は収束するという。

$$\int_A^{c_0} f(x) dx, \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x) dx, \int_{a_i}^{c_i} f(x) dx, \int_{c_n}^B f(x) dx$$

広義積分の値はこれらのすべての和で定義する。即ち

$$\int_A^B f(x) dx = \int_A^{c_0} f(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{c_i} f(x) dx + \int_{c_n}^B f(x) dx$$

で定義する。

### 例 1.17

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$  : この広義積分は (5) のタイプである。分点  $c_0$  として 0 を選ぶ。  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$

$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$  が共に収束していれば値が求まる。  $I(M) = \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx$  する。  $x = \tan t$

とおき置換積分を行う。  $0 = \arctan 0$  である。また  $M' = \arctan M$  とおくと、  $dx = (1+x^2)dt$

なので、  $I(M) = \int_0^{M'} \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) dt = \int_0^{M'} dt = M'$

$M \rightarrow \infty$  のとき、  $M' \rightarrow \frac{\pi}{2}$  となるので、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M' \rightarrow \frac{\pi}{2}} M' = \frac{\pi}{2}$$

$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$  も同様に計算できて  $\frac{\pi}{2}$  となる。

(2)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$  : (1) は積分区間を見ると、広義積分である事が分かったが、この場合は被積分関数を見る必要がある。この関数は区間の両端で無限大となるので、(5) のタイプの

広義積分になっている。分点を 0 とする。  $x = \sin t$  と変数変換を行う。  $0 = \arcsin 0$  である。  
 $u = \arcsin(1 - \varepsilon)$  とおく。  $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき  $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$  である。  $I(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  と  
 おくと、  $I(\varepsilon) = \int_0^u \frac{1}{\cos t} \cos t dt = u$  なので  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I(\varepsilon) = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} u = \frac{\pi}{2}$  同様に議論すれば

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ も分かる。}$$

**演習問題 1.6** 次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$                    | (2) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ |
| (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$ | (4) $\int_0^{\infty} \cos x dx$           |

### 1.5 物理量・面積・曲線の長さ

積分を用いると面積だけではなく、色々な物理量を求めることができる。その原理を確認しながら幾つかの物理量を計算しよう。最後に曲線の長さも計算する。

**[物理量]** 3つの物理量  $X, Y, Z$  の間に  $Z = Y \times X$  の関係があるとき、量  $Z$  は一般に積分を用いて求める事ができる<sup>(1)</sup>。

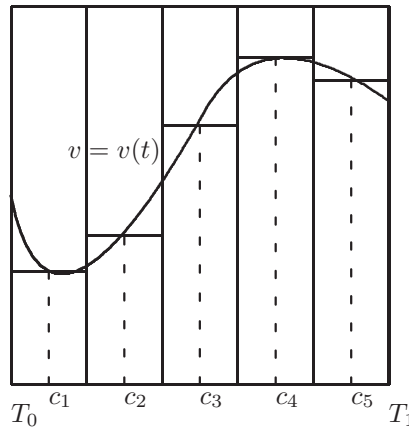


図 1.4

例えば (距離)=(速さ)×(時間) という関係がある。一定の速さ  $v$  で運動する物体が  $\Delta t$  の間に移動する距離は  $v\Delta t$  となる。速さ  $v$  が変化する場合を考える。  $v = v(t)$  として、時刻  $T_0$  から時刻  $T_1$  の間に移動する距離  $l$  を求めてみよう。  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  を  $[T_0, T_1]$  の分割とし、小区間  $[t_{i-1}, t_i]$  内に点  $c_i$  をとる ( $i = 1, \dots, n$ )。また  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  と置く。

<sup>(1)</sup>「 $Z$  が外延量である」との制限が必要であるが、ここでは外延量、内包量に関してきちんと説明はしない。ここでは  $Z$  が加法性を持つこと、即ち長さの様に  $1m$  と  $2m$  を加えると  $3m$  になるような性質、を仮定しておく。

時刻  $t_{i-1}$  から時刻  $t_i$  の間に移動する距離は、その間物体が一定の速さ  $v(c_i)$  で動いていると見做すと、 $v(c_i)\Delta t_i$  で近似できる。よって時刻  $T_0$  から時刻  $T_1$  の間の移動距離は  $\sum_{i=1}^n v(c_i)\Delta t_i$  で近

似できる。分割を細かくして行くとこれは  $\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt$  となる。以上により時刻  $T_0$  から時刻  $t_1$  の間に動いた距離  $l$  は

$$l = \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt$$

で与えられる事が分かる。

同様の議論を一般の場合に行くと次が得られる。量  $X$  が  $x_0 \rightarrow x_1$  と変化するとき、 $Y$  が一定のとき、 $Z = Y \times (x_1 - x_0)$  と表される量  $Z$  があるとする。  $X$  が  $x_0 \rightarrow x_1$  と変化するとき、 $Y$  が  $Y = Y(x)$  で与えられるとする。量  $X$  が  $x_0$  から  $x_1$  まで変化したときの量  $Z$  は

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} Y(x) dx$$

で与えられる。

「(面積)=(縦)×(横)」なので、 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

で与えられる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」である。空間内の領域が  $R$  を考える。平面  $x = u$  と  $R$  の共通部分の面積を  $m(u)$  とする。即ちここでは「(体積) = (面積)×(高さ)」と見ている。  $x < a$  または  $x > b$  のとき  $m(x) = 0$  とする。  $R$  の体積  $V$  は

$$V = \int_a^b m(x) dx$$

で与えられる。

$xy$  平面上の連続曲線  $y = f(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) と  $x$  軸及び 2 直線  $x = a, x = b$  で囲まれた図形を  $x$  軸の周りに 1 回転させて生じる回転体の体積を考える。平面  $x = t$  で切った断面の面積は  $\pi f(t)^2$  なので求める体積は

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

となる。

**演習問題 1.7** 半径  $r$  の球の体積を求めよ。

**演習問題 1.8**  $y = x^2$  と  $y = 5x$  にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を  $x$  軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

**演習問題 1.9** 「(仕事)=(力)×(移動距離)」という関係がある。バネが  $x$  伸ばされたとき働く力は  $k$  を比例定数とすると、 $F = kx$  であった。バネを  $x$  伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

**演習問題 1.10** 速度  $V$  で走っている質量  $M$  の車が等加速度運動(等減速度運動と言うべきか)して停止した。このとき車を止めるために必要な仕事の量を  $M$  と  $V$  を用いて表せ。次は少し難

しい問題, \* 付きと考えること: 等加速度運動でない場合に関しても, 仕事の量を計算せよ。結果的には前と同じ答えになる<sup>(2)</sup>。

密度が一樣でない銅線を考える。密度が一定のときは「(質量)=(線密度) × (長さ)」という関係がある。導線は  $[a, b]$  に置かれているとする。点  $x$  における線密度を  $\mu(x)$  とするときこの銅線の質量  $K$  は

$$K = \int_a^b \mu(x) dx$$

で与えられる。

質量  $K$  の質点が  $x$  軸上の  $x$  座標が  $a$  である点にあるとする。この質点の (原点に関する) モーメントは  $aK$  である。密度が一樣でない銅線が  $[a, b]$  に置かれていて, 点  $x$  における線密度を  $\mu(x)$  とするときこの銅線のモーメント  $M$  は

$$M = \int_a^b x\mu(x) dx$$

で与えられる。物体の重心とは, その物体の全質量がその点に存在する様な質点を考えたとき, そのモーメントが物体のモーメントと等しいような点なので, この導線の重心を  $c$  とすると

$$c \int_a^b \mu(x) dx = \int_a^b x\mu(x) dx$$

となる。

**演習問題 1.11** 一樣な密度の半円板  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  の重心の座標を求めよ。

**演習問題 1.12** 一樣な密度の材質でできている高さ  $h$  の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

[面積] ここでは曲線が極座標表示されている場合と, パラメータ表示されている場合の面積の求め方を考える。曲線  $C$  が  $r = f(\theta)$  ( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ) で与えられているとき, 曲線  $C$  及び  $x$  軸とのなす角  $\theta_0$  である直線となす角が  $\theta_1$  である直線に囲まれた部分の面積  $S$  を求める事を考える。

半径  $r$  の円において角が  $\theta_1$  から  $\theta_2$  の部分の扇形の面積は  $\frac{r^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)$  なので,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2 d\theta$$

となる。

同じ曲線が  $(x, y) = (x(t), y(t))$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) とパラメータ表示されているとする。このとき  $\tan \theta = \frac{y(t)}{x(t)}$  より  $\theta = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$  となるので,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2} = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$$

<sup>(2)</sup> 仕事の量は速度の 2 乗に比例します。よく知られているように 120km/時の車を止めるには, 60km/時の車の 4 倍の仕事量が必要になります。車を運転する人は十分注意して下さい

となる。 $f(\theta)^2 = r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$  なので、積分の変数変換を行うと

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

となる。

**演習問題 \*1.13**  $(x(t), y(t))$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) が閉曲線するとき、即ち  $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1))$  のとき、この閉曲線で囲まれる部分の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt$$

である事を示せ。

**演習問題 1.14**  $r = f(\theta) = 1 + \cos \theta$  と極座標表示されている曲線を心臓形 (cardioid) という。これについて次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

**演習問題 1.15**  $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$  でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[曲線の長さ] 次に曲線の長さを求める事を考える。平面上の曲線  $C$  がパラメータ  $t$  により  $x = x(t), y = y(t)$ , ( $a \leq t \leq b$ ) と表されているとする。 $[a, b]$  の分割  $\Delta$  を考える。

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$P_i = ((x(t_i), y(t_i)))$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) とし折れ線  $P_0P_1 \cdots P_n$  で曲線  $C$  を近似する。折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

となる。ただし  $c_i, d_i$  は  $t_{i-1} \leq c_i, d_i \leq t_i$  となる実数である。ここで分割を細かくしていった極限を考えると、極限では

$$(\text{曲線 } C \text{ の長さ}) = \int_a^b \left\{ \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \right\} dt$$

となる。

**演習問題 1.16** 演習問題 1.14 の曲線の長さを求めよ。

**演習問題 1.17** 極座標表示された曲線  $r = f(\theta) = \sin^3 \frac{\theta}{3}$  の概形を書き、全長を求めよ。

**演習問題 1.18** 曲線  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  の長さを求めよ。