解析学 II 要綱 #7　　2009–6–25　　河野

2.3 変数変換

この節では重積分の変数変換について扱う。1 変数の積分における変数変換 (置換積分法) を思い出そう。$x=\varphi(t)$ の関係があり $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$ の関係があるとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\frac{d\varphi}{dt}\,dt$$

であった。変数変換におけるポイントは 2 つあった。1 つは積分領域が変わること，2 つ目は $\dfrac{d\varphi}{dt}$ が付く事である。2 番目の $\dfrac{d\varphi}{dt}$ は何を意味しているかというと，x–座標での変化と t–座標での変化の比と考えられる。

重積分でこれにあたるのは何であろう。変数 x, y の組と変数 u, v の組があって，$x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ という関係があるとする。(x,y)–平面上の領域 D と (u,v)–平面上の領域に対応関係があるとする。1 変数の積分領域の変換は D から E への変換に対応する。2 番目の $\dfrac{d\varphi}{dt}$ に対応するのは何であろう。2 次元の場合それは面積比に対応する。1 次変換 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ では面積比はその行列式の絶対値 $|\det A| = |ad-bc|$ であった。一般の変換 $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ では局所的にはヤコビ行列の行列式 (ヤコビアン) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ がそれになる。重積分の場合の変数変換は次で与えられる。

定理 2.8 [変数変換] $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ なる対応で (x,y)–平面の領域 D と (u,v)–平面の領域 E が面積 0 の部分を除いて一対一対応していて，ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ が 0 になる領域は面積確定[(1)]とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

例を考えよう。

例 2.9 (1) $D=\{x^2+y^2 \leqq 1\}$ とし，$c>0$ を定数とするとき，$I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+c^2}dxdy$ を考える。$x=r\cos\theta, y=\sin\theta$ とする。$E=\{(r,\theta)\,|\,0\leqq r\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq 2\pi\}$ とおくと，この対応関係において，$r=0, \theta=0, \theta=2\pi$ の部分を除いて一対一であり，この部分は面積 0 である。$\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta, \dfrac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta, \dfrac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$ なのでヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$ となる。ヤコビアンが 0 になる部分も面積 0(面積確定) である。よって，

$$I=\iint_E \frac{1}{r^2+c^2}rdrdt = \int_0^1\left\{\int_0^{2\pi}\frac{r}{r^2+c^2}\,d\theta\right\}dr = 2\pi\int_0^1 \frac{r}{r^2+c^2}\,dr$$

(1) 実際使われるときは面積 0 という場合が多い。面積 0 であれば面積確定である。

となる。後は 1 変数の積分である。ここで $t = r^2 + c^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dr} = 2r$ なので，

$$I = 2\pi \int_{c^2}^{1+c^2} \frac{r}{t}\frac{1}{2r}\, dt = \pi \int_{c^2}^{1+c^2} \frac{1}{t}\, dt = \pi \log \frac{1+c^2}{c^2}$$

となる。

(2) 例 2.7 (2) をもう一度考える。

$$I = \iint_D |\sin(x+y)| dxdy \qquad D = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 2\pi\}$$

$u = x+y, v = y-x$ とおいて変数変換を行う。$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ なので $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 2$ である。よって $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$ となる。この写像で直線 $x = 0$ は直線 $u - v = 0$ に，$y = 0$ は $u + v = 0$ に $x + y = 2\pi$ は $u = 2\pi$ にそれぞれ写るので，xy–平面の領域 D は uv–平面の領域 $E = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u+v \geqq 0, u-v \geqq 0, u \leqq 2\pi \right\}$ に写る。E は $E = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq u \leqq 2\pi, -u \leqq v \leqq u \right\}$ と書けるので

$$I = \iint_D |\sin u| \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-u}^{u} |\sin u|\, dv \right\} du = \int_0^{2\pi} u|\sin u|\, du$$

となる。$\sin u$ の正負により場合分けが必要なのは例 2.7 (2) の場合と同じだが，場合分けの数を減らす事ができる。

演習問題 2.6　次の重積分を求めよ。

(1) $I = \displaystyle\iint_D \{x+y\}\, dxdy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 2x \right\}$

(2) $I = \displaystyle\iint_D \left\{x^2+y^2\right\} dxdy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \right\} \ (a > 0, b > 0)$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \cos x \cos y dxdy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x+y \leqq \pi, 0 \leqq x-y \leqq \pi \right\}$

2.4　広義重積分

1 変数の広義積分と同様に 2 変数関数に対し広義積分を定義する。

定義 2.10 $\mathbb{R}^2$ の部分集合の列 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ が次を満たすとき，D の**近似増加列**という。

(1) 各 n に対し A_n は有開閉集合

(2) 各 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$

(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し $K \subseteq A_n$ となる A_n

が存在する。

(1)　$f(x,y) \geqq 0$ **の場合**　最初に $f(x,y) \geqq 0$ の場合を定義する。$\{A_n\}$ を D の近似増加列とする。$I_n = \displaystyle\iint_{A_n} f(x,y) dxdy$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ が存在するとき，$f(x,y)$ は D で**広義積分可能**といい，この極限を $\displaystyle\iint_D f(x,y) dxdy$ と表す。

(2) 一般の場合　$f(x,y)$ に対し $f_+(x,y) = \max\{f(x,y),0\}$，$f_-(x,y) = -\min\{f(x,y),0\}$ とおく。このとき $f_+(x,y) \geqq 0$, $f_-(x,y) \geqq 0$，$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$ となっている。

$$\iint_D f_+(x,y)dxdy, \qquad \iint_D f_-(x,y)dxdyy$$

が共に存在するとき (広義積分可能であるとき)，$f(x,y)$ は D で広義積分可能といい

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f_+(x,y)dxdy - \iint_D f_-(x,y)dxdy$$

で定義する。

関数が定符号の時広義積分は近似増加列の選び方によらない事が知られている。

定理 2.11 $f(x,y)$ が D 上で連続で定符号とする。$\{A_n\},\{B_n\}$ を D の 2 つの増加近似列とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} f(x,y)dxdy$$

が成立する。

演習問題 2.7　次の広義積分は収束するか。収束しない場合はそれを示し，収束する場合は積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy \qquad D=\{x \geqq 0, y \geqq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy \qquad D=\{x \geqq 0, y \geqq 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy \qquad D=\mathbb{R}^2$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy \qquad D=\{0 \leqq x^2+y^2 \leqq 1\}$

演習問題 2.8　次の問に答えながら $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-x^2\right)\,dx$ を求めよ[(1)]。そのために広義積分

$$J = \iint_D \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy \qquad D=\{x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

を計算する。

(1) 自然数 n に対し $A_n = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x^2+y^2 \leqq n^2\}$ とおく。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換変換して $J_n = \displaystyle\iint_{A_n} \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy$ を求めよ。

(2) J を求めよ。

(3) 自然数 n に対し $B_n = \{0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq n\}$ とおく。$K_n = \displaystyle\iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right)dxdy$ とするとき $K_n = \left\{\displaystyle\int_0^n \exp\left(-x^2\right)\,dx\right\}^2$ が成立する事を示せ。

(4) I を求めよ。

[(1)] $\exp f(x) = e^{f(x)}$ である。肩に乗っている指数が見にくい場合はこの様な記法も使う。