2.5 3 重積分

n 変数関数に関する積分は n **重積分**と呼ばれる。本質的には 2 重積分と同じであるが記述は少し複雑になる。ここでは 3 重積分に関してあつかう。

(1) 定義と性質 最初に直方体領域 $E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_1 \leqq x \leqq b_1, a_2 \leqq y \leqq b_2, a_3 \leqq z \leqq b_3 \right\}$ で定義された有界な関数 $f(x,y,z)$ に関する定積分を定義する。E の分割

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_\ell \,;\, y_0, y_1, \ldots, y_m \,;\, z_0, z_1, \ldots, z_n\}$$

とは $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_\ell = b_1$, $a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b_2$, $a_3 = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b_3$ を満たすものをいう。このとき $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ とする。$\max\{\, \Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k \mid i = 1,\ldots,\ell, j = 1,\ldots,m, k = 1,\ldots,n \}$ を分割の最大幅といい $\|\Delta\|$ で表す。分割 Δ に対し

$$\begin{aligned} M_{ijk} &= \sup\{\, f(x,y,z) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j, z_{k-1} \leqq z \leqq z_k \,\}^{(1)} \\ m_{ijk} &= \inf\{\, f(x,y,z) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j, z_{k-1} \leqq z \leqq z_k \,\} \end{aligned}$$

と置き，

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \\ s(\Delta) &= \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} m_{ijk}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \end{aligned}$$

とする。$\displaystyle\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\Delta) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} s(\Delta)$ となるとき，$f(x,y,z)$ は E で積分可能であるといい，この極限値を

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$$

と書く。

一般の有界閉領域 D に対しては次の様に定義する。$D \subseteq E$ となる直方体領域 E をとる。$f(x,y,z)$ に対し $f_E(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z) \in D \\ 0 & (x,y,z) \notin D \end{cases}$ と定義する。f_E が E で積分可能のとき，f は D で積分可能であるといい，

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_E f_E(x,y,z)\,dxdydz$$

で定義する。

(1) 上限 (sup)，下限 (inf) の概念が分かりにくい場合は，2 変数の積分の場合と同様に関数は連続して，$\sup \to \max, \inf \to \min$ と読み替えて考えよ。

有界閉領域 D に対し定数関数 1 が D で積分可能のとき，領域 D は体積確定といい，$\mu(D) = \iiint_D dxdydz$ をその体積と定義する。**以下領域はすべて体積確定とする。**

3 重積分に関しても 2 重積分と同じ性質が成り立つ。

定理 2.12 3 重積分は次の性質を持つ。ただし積分領域は体積確定，被積分関数は積分可能を仮定する。

(1) [線型性]

1) $\displaystyle\iiint_D \{f+g\}\,dxdydz = \iiint_D fdxdydz + \iiint_D gdxdydz$

2) $\displaystyle\iiint_D \alpha f dxdydz = \alpha\iiint_D fdxdydz$

(2) [領域線型性] 領域 D_1, D_2 に対し $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき和集合 $D_1 \cup D_2$ を $D_1 + D_2$ と書く。

$$\iiint_{D_1+D_2} fdxdydz = \iiint_{D_1} fdxdydz + \iiint_{D_2} fdxdydz$$

(3) [単調性] 任意の $(x,y,z) \in D$ に対し $f(x,y,z) \leqq g(x,y,z)$ となるとき

$$\iiint_D fdxdydz \leqq \iiint_D gdxdydz$$

(2) 累次積分 $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \leqq z \leqq b, h_1(z) \leqq y \leqq h_2(z), g_1(y,z) \leqq x \leqq g_2(y,z) \right\}$ となっているとき，

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \left\{ \int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right\} dy \right\} dz$$

となる。領域の表し方によって積分順序が変わることは 2 重積分の場合と同様である。領域 D が $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, h_1(x) \leqq y \leqq h_2(x), g_1(x,y) \leqq z \leqq g_2(x,y) \right\}$ という形で表されているときは

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left\{ \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dy \right\} dx$$

となる。他の場合も同様である。

標語的には「3 重積分 =1 変数積分 3 回」という事ができる。「2 重積分 =1 変数積分 2 回」であったから，「3 重積分 =2 重積分 +1 変数積分」または「3 重積分 =1 変数積分 +2 重積分」と見る事もできる。上の例で言うと $D(z) = \{ (x,y) \mid g_1(y,z) \leqq x \leqq g_2(y,z), h_1(z) \leqq y \leqq h_2(z) \}$ とするとき

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy \right\} dz$$

であり，$E = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, h_1(z) \leqq y \leqq h_2(z), a \leqq z \leqq b \right\}$ とおくとき

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_E \left\{ \int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right\} dydz$$

となる。

例として球の体積を求めてみよう原点中心の半径 R の球を $D = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \right\}$ とする。定数関数 1 を D で積分したものが球の体積である。

$$D = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, -R \leqq x \leqq R, -\sqrt{R^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{R^2-x^2}, -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \leqq z \leqq \sqrt{R^2-x^2-y^2} \right\}$$

となるので[(2)],

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dxdydz = \int_{-R}^{R} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right\} dy \right\} dx \\ &= \int_{-R}^{R} \left\{ \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dy \right\} dx \end{aligned}$$

となる。ここでこの積分を 2 重積分に再び直す。$E = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq R^2 \right\}$ とおくと

$$V = 2\iint_E \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

である。2 変数の変数変換で極座標に変換する。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと,

$$V = 2\int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} r\sqrt{R^2-r^2}\, d\theta \right\} dr = 4\pi \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\, dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

となる

演習問題 2.9　次の積分値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D ydxdydz \qquad D = \left\{ x^2+y^2+z^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz \qquad D = \left\{ 0 \leqq x \leqq y^2, z \leqq y \leqq 2z, 0 \leqq z \leqq 1 \right\}$

(3)
$$\iiint_D z^2dxdydz \qquad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\} (a,b,c>0)$$

(4) $\displaystyle\iiint_D \left\{ x+y^2z \right\} dxdydz \qquad S = \left\{ 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq 1, x \geqq 0 \right\}$

(3)　変数変換　$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ という関係で，(x,y,z)–空間の領域 D と (u,v,w)–空間の領域 E が体積 0 の部分を除き 1 対 1 に対応しているとする。ヤコビ行列は

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

ヤコビ行列式 (ヤコビアン) は

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right)$$

[(2)] 2 次元より 3 次元の方が図が書きにくい。今の場合 3 次元の領域 D を平面 $x = x$(おかしな表記だが意味は分かると思う) で切った切口は 2 次元の図形なのできちんと描くことができる。その図を見て y, z の変域を考えるというのが間違えない 1 つの方法である。

である。このとき

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

が成立する。

　ここでは 3 次元の極座標表示を用いて，もう一度球の体積を求めてみよう。色々な置き方が考えれるが通常は次の形が用いられる。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ となるので，

$$V = \iiint_D dxdydz = \iiint_F r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

となる。ただし $F = \{\,(r,\theta,\varphi)\,|\,0 \leqq r \leqq R, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,\}$ とする。よって

$$V = \int_0^R \left\{ \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\varphi \right\} d\theta \right\} dr = 2\pi \int_0^R \left\{ \int_0^\pi r^2\sin\theta\, d\theta \right\} dr = 4\pi \int_0^R r^2\, dr = \frac{4\pi R^3}{3}$$

を得る。

演習問題 2.10　積分 $I = \iiint_D z^2 dxdydz$ ($D = \left\{ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$ ここで $a,b,c > 0$ とする) を考える (演習問題 2.9 (3) の問題)。
(1) $x = au, y = bv, z = cw$ とおいて変数変換せよ。
(2) さらに極座標に変換し積分を求めよ。

(4)　広義積分
(a)　$\mathbb{R}^3$ の部分集合の列 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ が次を満たすとき，D の**近似増加列**という。
(1) 各 n に対し A_n は有開閉集合
(2) 各 n に対し $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq D$
(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対し $K \subseteq A_n$ となる A_n
が存在する。
(b)　まず $f(x,y,z) \geqq 0$ の場合を考える。$\{A_n\}$ を D の近似増加列とする。

$$I_n = \iiint_{A_n} f(x,y,z)dxdydz$$

とする。$\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ が存在するとき，$f(x,y,z)$ は D で**広義積分可能**といい，この極限を

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

と表す。
(c) 一般の場合　$f(x,y,z)$ に対し $f_+(x,y,z) = \max\{f(x,y,z),0\}$，$f_-(x,y,z) = -\min\{f(x,y,z),0\}$ とおく。このとき $f_+(x,y,z) \geqq 0$, $f_-(x,y,z) \geqq 0$，$f(x,y,z) = f_+(x,y,z) - f_-(x,y,z)$ となって

いる。$\displaystyle\iiint_D f_+(x,y,z)dxdydz, \iiint_D f_-(x,y,z)dxdydz$ が共に存在するとき (広義積分可能であるとき)，$f(x,y)$ は D で広義積分可能といい

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f_+(x,y,z)dxdydz - \iiint_D f_-(x,y,z)dxdydz$$

で定義する。

関数が定符号の時広義積分は近似増加列の選び方によらない事は 2 変数関数の場合と同様である。

演習問題 2.11 次の広義積分は収束するか。収束･発散を判定し収束するときはそれを計算せよ。

(1) $\displaystyle\iiint_D {\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}^2 dxdydz \qquad D = \left\{\, 1 \leqq x^2+y^2+z^2 \,\right\}$

(2) $\displaystyle\iiint_D {\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}^p dxdydz \qquad D = \left\{\, 1 \leqq < x^2+y^2+z^2 \,\right\},\ p > 0$

(3) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz \qquad D = \left\{\, 0 < x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \,\right\}$

を計算せよ。

2.6 物理量・体積

物理量を積分で表す事についていは 1.5 節で取り上げた。このときは 1 変数の積分までしか学んでいなかった。ここでは重積分を使ったものを扱う。原理は前と全く同じである。

前に述べたように 3 つの物理量 X, Y, Z の間に $Z = Y \times X$ の関係があるとき，量 Z は一般に積分を用いて求める事ができる。X という量が 1 次元的ではなく 2 次元的だと 2 重積分に，それ以上だと n 重積分になる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」であるが，1.5 節ではこれを「(体積)=(面積)×(高さ)」と見て体積を求めた。ここでは「(体積)=(高さ)× {(縦) × (横)}」と見て体積を求めよう。D を xy–平面の有界な領域とする。$z = f(x,y), z = g(x,y)$ を D で定義された連続な関数とする。任意の $(x,y) \in D$ に対し $g(x,y) \leqq f(x,y)$ が成立しているとする。このとき

$$V = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y) \in D, g(x,y) \leqq y \leqq f(x,y) \,\right\}$$

の体積 vol(V) は

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_D \{f(x,y) - g(x,y)\}\, dxdy$$

で与えられる。

演習問題 2.12 半径 r の球の体積を求めよ。$D = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq r^2 \,\right\}$ とし，$f(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2},\ g(x,y) = -\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ と考えよ。

「(体積)=1× {(高さ) × (縦) × (横)}」と見て計算する事もできる。そのときは $\mathbb{R}^3$ の有界な領域を V とすると V の体積 vol(V) は

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_D dxdydz$$

で与えられる。

演習問題 2.13　$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を上の方法で求めよ。

(質量)=(密度)×(体積) の関係がある。3 次元の領域 D をしめる物体の点 (x,y,z) における密度が $\mu(x,y,z)$ のとき，この物体の質量 K は

$$K = \iiint_D \mu(x,y,z)dxdydz$$

で与えられる。この物体の x に関するモーメント M_x は $M_x = \iiint_D x\mu(x,y,z)dxdydz$ で与えられる。y,z にかんしても同様で $M_y = \iiint_D y\mu(x,y,z)dxdydz, M_z = \iiint_D z\mu(x,y,z)dxdydz$ となる。重心を (c_x, c_y, c_z) とすると，

$$c_x \iiint_D \mu(x,y,z)dxdydz = \iiint_D x\mu(x,y,z)dxdydz$$

等の関係が成立する。

演習問題 2.14　一様な密度をもつ半球体 $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqq r^2, x \geqq 0 \right\}$ の重心の位置を求めよ。