解析学II問題解説 #7

河野

演習問題 2.6　次の重積分を求めよ。

(1) $I = \iint_D \{x+y\}\,dxdy \qquad D = \{\, x^2+y^2 \leqq 2x \,\}$

(2) $I = \iint_D \{x^2+y^2\}\,dxdy \qquad D = \left\{\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1 \,\right\}\ (a>0, b>0)$

(3) $I = \iint_D \cos x \cos y\,dxdy \qquad D = \{\, 0 \leqq x+y \leqq \pi, 0 \leqq x-y \leqq \pi \,\}$

(1)　$x^2+y^2 \leqq 2x$ は $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ と変形できるので，領域 D は $(1,0)$ を中心とする半径 1 の円の内部 (境界を含む) なので，$x \geqq 0$ である。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と極座標に変換する。$x>0$ では $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ となるが，$y>0$ を保ちながら $x \to 0$ となるとき $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ となる。$y<0$ を保ちながら $x \to 0$ となるとき $\theta \to -\dfrac{\pi}{2}$ となる。また $r^2 = x^2+y^2 \leqq 2r\cos\theta$ より $r \leqq 2\cos\theta$ となる。よって $E = \left\{ -\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta \right\}$ とおくと E と D は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。よって

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \{x+y\}\,dxdy = \iint_E (r\cos\theta + r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2\cos\theta} (r\cos\theta + r\sin\theta) r\,dr \right\} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{8}{3} (\cos\theta + \sin\theta)\cos^3\theta \right\} d\theta \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

(2)　$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ とおく。$E = \{\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq r \leqq 1 \,\}$ とおくと，E と D は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = abr$ なので面積 0 の部分を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換のための条件を満たしている。

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \{x^2+y^2\}\,dxdy = \iint_E (a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta) abr\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 (a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta) abr\,dr \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{4} ab \int_0^{2\pi} \left\{ a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{4} a^3 b\pi + \frac{1}{4} ab^3 \pi
\end{aligned}
$$

(3) $u=x+y, v=x-y$ とおく。$E=\{\,0\leqq u\leqq\pi, 0\leqq v\leqq\pi\,\}$ とおくと，E と D は一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}$ なのでヤコビアンが 0 になる事はない。よって変数変換のための条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \cos x\cos y\,dxdy=\iint_E \cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\,du\right\}dv\\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\cos v\,dv=0
\end{aligned}$$

演習問題 2.7　次の広義積分は収束するか。収束しない場合はそれを示し，収束する場合は積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy \quad D=\{x\geqq 0, y\geqq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy \quad D=\{x\geqq 0, y\geqq 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy \quad D=\mathbb{R}^2$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy \quad D=\{0\leqq x^2+y^2\leqq 1\}$

(1) $A_n=\{\,0\leqq x\leqq n, 0\leqq y\leqq n-x\,\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。

$$I_n=\iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$$

とおく。

$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy\\
&= \int_0^n\left\{\int_0^{n-x}\frac{1}{(x+y+1)^2}\,dy\right\}dx\\
&= \int_0^n\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{n+1}\right\}dx\\
&= \log(n+1)-\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ は収束しない。よって広義積分は収束しない。

(2) $A_n=\{\,0\leqq x\leqq n, 0\leqq y\leqq n-x\,\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。

$$I_n=\iint_{A_n}\frac{1}{(x+y+1)^3}dxdy$$

とおく。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^3} dxdy \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^{n-x} \frac{1}{(x+y+1)^3}\, dy \right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^n \left\{ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{n^2}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

となるので $\lim_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dxdy = \frac{1}{2}$$

となる。

(3) $A_n = \left\{ x^2+y^2 \leqq n^2 \right\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき，$E_n = \left\{ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, 0 \leqq r \leqq n \right\}$ とおくと E_n と A_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} \iint_{A_n} \cos(x^2+y^2) dxdy &= \iint_{E_n} r\cos r^2 dxdy \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^{2\pi} r\cos r^2\, d\theta \right\} dr \\ &= 2\pi \int_0^n r\cos r^2\, dr \\ &= \pi \sin n^2 \end{aligned}$$

となる。$\lim_{n\to\infty} I_n$ は収束しないので，広義積分は収束しない。

(4) $A_n = \left\{ \dfrac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおき，$E_n = \left\{ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \dfrac{1}{n} \leqq r \leqq 1 \right\}$ とおくと E_n と A_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 で

はない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dxdy \\ &= \iint_{E_n} \frac{r}{r^{2p}} drd\theta \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2p}}\, d\theta \right\} dr \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{1-2p}\, dr \end{aligned}$$

となる。$p=1$ のとき $I_n = 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r}\, dr = 2\pi \log n$ なので広義積分は収束しない。$p \neq 1$ のとき $I_n = 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{1-2p}\, dr = \left[\frac{\pi}{1-p} r^{2(p-1)} \right]_{r=\frac{1}{n}}^{1} = \frac{\pi}{1-p}\left(1-n^{2(p-1)}\right)$ となる。$p<1$ のとき収束して $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dxdy = \frac{\pi}{1-p}$ となる。$p>1$ のとき $\lim_{n\to\infty} I_n$ は収束しない。

演習問題 2.8 次の問に答えながら $I = \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\, dx$ を求めよ[1]。そのために広義積分

$$J = \iint_D \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy \qquad D = \{x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

を計算する。

(1) 自然数 n に対し $A_n = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x^2+y^2 \leqq n^2\}$ とおく。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変数変換変換して $J_n = \iint_{A_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy$ を求めよ。

(2) J を求めよ。

(3) 自然数 n に対し $B_n = \{0 \leqq x \leqq n, 0 \leqq y \leqq n\}$ とおく。$K_n = \iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy$ とするとき $K_n = \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \right\}^2$ が成立する事を示せ。

(4) I を求めよ。

(1) $E_n = \left\{ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq n \right\}$ とおくと $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の対応で E_n と A_n は面積 0 を除いて一対一に対応している。ヤコビアンは $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので

[1] $\exp f(x) = e^{f(x)}$ である。肩に乗っている指数が見にくい場合はこの様な記法も使う。

$$
\begin{aligned}
J_n &= \iint_{A_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy \\
&= \iint_{E_n} r\exp\left(-r^2\right) dxdy \\
&= \int_0^n \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\exp\left(-r^2\right)\, d\theta \right\} dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^n r\exp\left(-r^2\right)\, dr \\
&= \frac{\pi}{4}\left(1-\exp\left(-n^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。

(2)

$$
\begin{aligned}
J &= \lim_{n\to\infty} J_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-\exp\left(-n^2\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
K_n &= \iint_{B_n} \exp\left(-x^2-y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^n \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2-y^2\right)\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^n \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right)\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^n \left\{ \exp\left(-x^2\right)\int_0^n \exp\left(-y^2\right)\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^n \exp\left(-y^2\right)\, dy \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \\
&= \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \\
&= \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \right\}^2
\end{aligned}
$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= J = \lim_{n\to\infty} J_n \\
&= \lim_{n\to\infty} K_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \right\}^2 \\
&= \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_0^n \exp\left(-x^2\right)\, dx \right\}^2 \\
&= \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-x^2\right)\, dx \right\}^2 \\
&= I^2
\end{aligned}$$

となるので

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となる。