

1.5 平均値の定理

この節で取り上げる平均値の定理は微積分学全体の中でもキーポイントとなる重要な定理である。これを証明するために実数論が作られたとあってよい。「或る区間で $f'(x) > 0$ ならばそこで単調増加」という命題もこの定理から導かれる

定理 1.16 [平均値の定理] 関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能とする。このとき $a < c < b$ を満たす c が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立する。

この定理を示すために次の定理を用いる。

定理 1.17 [Rolle(ロル)の定理] 関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能とする。 $f(a) = f(b)$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して $f'(c) = 0$ が成立する。

証明 最大値定理より最大値を与える c が存在する。今 $a < c < b$ を仮定する。 c は最大値を与えるので任意の h に対し $c+h$ が区間 $[a, b]$ に入っていれば $f(c+h) \leq f(c)$ が成立する。 $h > 0$ のとき $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ なので $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ が成立する。また $h < 0$ のとき $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ なので $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ が成立する。よって $f'(c) \geq 0$ かつ $f'(c) \leq 0$ が成立するので、 $f'(c) = 0$ である。

途中 $a < c < b$ を仮定したが、これが成立しない場合 $f(a) = f(b)$ が最大値となっている。 f が定数関数の場合は定理は成立しているので定数関数でないを仮定する。このときは前述の議論を最小値に関して行えばよい。 ■

この定理から平均値の定理が示されるが、ここでは平均値の定理を一般化した次の定理を示す。次の定理で $g(x) = x$ とすれば平均値の定理が従う。

定理 1.18 [Cauchy(コーシー)の平均値定理] 関数 f, g は閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) で微分可能とする。 (a, b) で $g'(x) \neq 0$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成立する。

証明 天下りではあるが $F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$ とおく。この関数 F は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能である。また $F(a) = 0, F(b) = 0$ が成

立する。よって Rolle の定理より c ($a < c < b$) が存在して $F'(c) = 0$ が成立する。 $F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$ なので $F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$ が成立する。ここで $g'(x) \neq 0$ なので $g(b) - g(a) = 0$ なら Rolle の定理に矛盾するので、 $g(b) - g(a) \neq 0$ となる。よって割り算を実行すれば定理が得られる。■

定理 1.18 において $g(x) = x$ とおくと平均値の定理が示される。ここで平均値の定理を少し拡張した形で書き直しておこう。 $b = a + h$ とし、 $\theta = \frac{c - a}{h}$ とおくと平均値の定理は

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h \quad (0 < \theta < 1)$$

となる θ が存在するという形になる。この形で考えると、 h が負のときも定理は成立する。即ち次の形で述べる事ができる。

定理 1.19 関数 f は区間 I で微分可能とする。 $a, a + h$ が区間 I に属しているとする。このときある θ ($0 < \theta < 1$) が存在して

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h$$

と書ける。

平均値の定理から次の系が従う。

系 1.20 f, g は区間 I で微分可能とする。

- (1) 区間 I において $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は定数関数である。
- (2) 区間 I において $f'(x) = g'(x)$ ならばある定数 C が存在して $f(x) = g(x) + C$ と書ける。

証明 区間内の任意の x_1, x_2 について、 $x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c ($x_1 < c < x_2$) が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。条件より $f'(c) = 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) = 0$ 即ち任意の x_1, x_2 に対し $f(x_2) = f(x_1)$ が成立する。これは f が定数関数である事を示している。

(2) は $h(x) = f(x) - g(x)$ とおき、 $h(x)$ に (1) を適用すればよい。■

演習問題 1.4 実際に (1) を用いて (2) を証明せよ。

系 1.21 f は区間 I で微分可能とする。

- (1) 区間 I において $f'(x) > 0$ ならば f は単調増加である。
- (2) 区間 I において $f'(x) < 0$ ならば f は単調減少である。

証明 (2) のみ示そう。 $x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c ($x_1 < c < x_2$) が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) < 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) < 0$ 即ち $f(x_1) > f(x_2)$ となる。よって f は単調減少である。■

演習問題 1.5 (1) を証明せよ。

系 1.22 f は区間 I で微分可能とする。

- (1) 区間 I において $f'(x) \geq 0$ ならば f は単調非減少である。
- (2) 区間 I において $f'(x) \leq 0$ ならば f は単調非増加である。

証明 (2)のみ示そう。 $x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c ($x_1 < c < x_2$)が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) \leq 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ 即ち $f(x_1) \geq f(x_2)$ となる。よって f は単調非増加である。■

演習問題 1.6 (1)を証明せよ。

これらの系について一言注意。解析学 II で微積分の基本定理を証明するが、そのときときキーになる命題が系 1.20 である。系 1.21, 1.22 は数学序論においても学んだ増減表・グラフの概形を描くことの基礎にある命題である。また定理 1.18 は数学序論で不定形の極限を求めるとき有効だったロピタルの定理の基礎にある定理である。通常の講義であればここでそのような応用を扱うのだが、序論で扱っているので省略する。その部分は先に進む前提になるのであやふやな人は序論の該当部分(演習問題 5.20, 5.22, 5.23, 5.24)を復習しておくこと。

演習問題 *1.7 定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。 $f(a) = g(a) = 0$ あるいは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ となるとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して、両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

1.6 高次導関数と Taylor の定理

導関数が微分可能なとき更にその導関数を考える事が出来る。それを高次導関数と呼ぶ。導関数の導関数を 2 次導関数または 2 階の導関数といい

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f''(x)$$

表す。 n 次 (n 階の) 導関数は

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x)$$

と表す。以下この節では関数は何回でも微分可能である事を仮定する。

関数が和の形になっているもの考える。 $F(x) = f(x) + g(x)$ とすると

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

であり、もう一度微分すると

$$F''(x) = f''(x) + g''(x)$$

となる。何回微分しても同様なので

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

となる。

関数が積の形になっているものの微分を考える。 $F(x) = f(x)g(x)$ のとき積の微分法より

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である。もう一度微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \end{aligned}$$

となる。一般に次が成立する。

命題 1.23 [ライプニッツの定理]

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

ここで $\binom{n}{k}$ は 2 項係数で $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ である。

証明 2 項係数に関して

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{kn!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

が成立する。定理を数学的帰納法により証明する。

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \binom{1}{0} f'(x)g(x) + \binom{1}{1} f(x)g'(x)$$

より $n=1$ のとき成立している。 n のとき成立を仮定する。即ち

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x) \cdot g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

の成立を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (f(x) \cdot g(x)) &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\left(f^{(n-k)} \right)'(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) \left(g^{(k)} \right)'(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) \\
&\quad + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n-k+1)}(x) g^{(k)}(x) \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

演習問題 1.8 次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^4$ (2) $f(x) = \log(x+1)$

(3) $f(x) = x^3 e^x$ (4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

(5) $f(x) = \sin x$ (6) $f(x) = x^3 \log x$

次の定理は「Taylor の定理」と呼ばれ色々な応用がある。

定理 1.24 [Taylor(テーラー) の定理]

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $R_n = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

証明 天下りではあるが、 $R = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)$ と置き、

$$F(X) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(X)}{k!} (x-X)^k \right) - \frac{R}{(x-a)^n} (x-X)^n$$

と置く。このとき、 $F(a) = 0, F(x) = 0$ が成立するのでロルの定理より $F'(c) = 0$ ($a < c < x$ または $x < c < a$) となる c が存在する。 $\theta = \frac{c-a}{x-a}$ と置くと定理が得られる。 ■

定理 1.24 は次の形でも述べることができる。

系 1.25 任意の h に対しある θ ($0 < \theta < 1$) が存在して

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{n!} h^n$$

と表せる。

任意の x に対し a と x の間に c が存在して

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

と表せる。

Taylor の定理の最初の応用として極値に関する次の定理を得る。

定理 1.26 $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は極小である。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は極大である。

(2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は増加の状態にある。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は減少の状態にある。

証明 (1), (2) とも 1) の場合のみ示す。 $f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a) > 0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において $f^{(n)}(x) > 0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ なので $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x \neq a$ ならば $(x-a)^n > 0$ なので、 $f(x) - f(a) > 0$ 即ち $f(x) > f(a)$ となる。よって f は $x = a$ で極小である。(2) 即ち n が奇数の場合 $x > a$ なら $(x-a)^n > 0$, $x - a < 0$ ならば $(x-a)^n < 0$ である。よって $x > a$ ならば $f(x) > f(a)$, $x < a$ ならば $f(x) < f(a)$ となっている。■

Taylor の定理の 2 番目の応用として近似がある。この定理は線型近似より一般的にはよりよい近似を与える。4 次式までの近似はすでに扱っているが、Taylor の定理を用いると「誤差の評価がきちんとできる」という利点がある。 $n = 2$ の場合を考えてみよう。 $n = 2$ の場合系 1.25 の形で述べると、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!} (x-a)^2$$

$f''(x)$ の有界性を仮定しているので、 $x - a$ が非常に小さいとき、最後の項は (非常に)² 小さい。よってこの項を無視して考える。これは線型近似を与える。

次に $n = 3$ の場合を考える。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!} (x-a)^3$$

$x - a$ が非常に小さいとき最後の項は (非常に)³ 小さい。この項を無視して $f(x)$ を

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2$$

で近似する。これは線型近似より一般的にはよりよい近似になっている。

一般にテーラーの定理において剰余項を切り捨てた近似を考えることができる。例えば自然対数の底 e の近似計算を考える。 $f(x) = e^x$ のとき、 $f'(x) = e^x$ より、任意の n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。剰余項 R_{n+1} を切り捨てた近似式を $g_n(x)$ とすると

$$g_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

となる。 $a_n = g_n(1)$ が e の近似値を与える。 $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ と計算すると

$$\begin{aligned} a_5 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.716666667 \\ a_6 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.718055556 \\ a_7 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2.718253968 \\ a_8 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2.718278770 \\ a_9 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2.718281526 \\ a_{10} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = 2.718281801 \end{aligned}$$

となる。テーラーの定理を用いた近似のよい点として誤差の評価が容易である事があげられる。剰余項が誤差となるので、その最大値が最大誤差となる。

3番目の応用として Taylor 級数展開がある。テーラー展開において剰余項 $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ となるとき、関数は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と表すことができる。これをテーラー級数と言い、このとき $f(x)$ は $x = a$ でテーラー (級数) 展開可能であるという。

今 $f(x) = e^x$ が $x = 0$ でテーラー展開可能である事は仮定しておく。 $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ なのでテーラー級数は

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。

$f(x) = \sin x$ のときは、 $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x \dots$ より、テーラー級数は

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

となる。

$\cos x$ のテーラー級数は

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

となる。

e^x の級数展開の x に形式的に ix (i は虚数単位即ち $\sqrt{-1}$) を代入する事により、オイラーは次のオイラーの公式を導いた。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

オイラーの公式と指数法則を知っていれば 3 角関数の加法定理は自然に出て来る。オイラーの公式より $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$ を得る。 $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ なので,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

この式の実部同士、虚部同士を比較すると加法定理が得られる。

演習問題 1.9 次の関数の $x = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = \log(1+x)$

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$

(4) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

演習問題 1.10 次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$

(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$

(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$