

## 2.4 合成関数の導関数

合成関数の導関数は次の様になる。1変数の場合と異なるので特に注意が必要である。

**定理 2.11**  $z = z(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t)$  は微分可能とする。このとき  $z(x(s, t), y(s, t))$  を  $s$  で微分した偏導関数および  $z(x(s, t), y(s, t))$  を  $t$  で微分した偏導関数は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}\end{aligned}$$

これを示すために全微分の式を思いだそう。 $z = z(x, y)$  が全微分可能のとき

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + z_x(x, y)h + z_y(x, y)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくと,  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立した。逆に

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

に対し  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立するとき,  $z$  は全微分可能であり,  $A = z_x(x, y), B = z_y(x, y)$  が成立する (→ 演習問題 2.4)。

$z(x(s, t), y(s, t))$  の全微分可能性を表す式を書くと,

$$\begin{aligned}z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k)) &= z(x(s, t), y(s, t)) + z_s(x(s, t), y(s, t))h \\ &\quad + z_t(x(s, t), y(s, t))k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}\end{aligned}\tag{1}$$

となっている。このとき

$$\begin{aligned}z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k)) &= z(x(s, t), y(s, t)) \\ &\quad + (z_x(x(s, t), y(s, t))x_s(s, t) + z_y(x(s, t), y(s, t))y_s(s, t))h \\ &\quad + (z_x(x(s, t), y(s, t))x_t(s, t) + z_y(x(s, t), y(s, t))y_t(s, t))k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}\end{aligned}\tag{2}$$

に対し  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立することが分かれば, 式 (1) と式 (2) とを比較して

$$\begin{aligned}z_s(x(s, t), y(s, t)) &= z_x(x(s, t), y(s, t))x_s(s, t) + z_y(x(s, t), y(s, t))y_s(s, t) \\ z_t(x(s, t), y(s, t)) &= z_x(x(s, t), y(s, t))x_t(s, t) + z_y(x(s, t), y(s, t))y_t(s, t)\end{aligned}$$

が成立することが分かる。よって式 (2) の成立を示す。

$z = z(x, y)$  および  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$  は微分可能なので,

$$x(s+h, t+k) = x(s, t) + x_s(s, t)h + x_t(s, t)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (3)$$

$$y(s+h, t+k) = y(s, t) + y_s(s, t)h + y_t(s, t)k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (4)$$

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + z_x(x, y)h + z_y(x, y)k + \varepsilon_3(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (5)$$

が成立している。

$$H = x_s(s, t)h + x_t(s, t)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$K = y_s(s, t)h + y_t(s, t)k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくと,  $x(s+h, t+k) = x(s, t) + H$ ,  $y(s+h, t+k) = y(s, t) + K$  が成立している。これを  $z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k))$  に代入して (5) を用いて変形すると (式が長くなるので,  $z = z(x, y)$ ,  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$ ,  $z_x = z_x(s, t)$ ,  $z_y = z_y(s, t)$ ,  $x_s = x_s(s, t)$ ,  $x_t = x_t(s, t)$ ,  $y_s = y_s(s, t)$ ,  $y_t = y_t(s, t)$  と略記する),

$$\begin{aligned} z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k)) &= z(x(s, t) + H, y(s, t) + K) \\ &= z + z_x H + z_y K + \varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2} \\ &= z + z_x \left( x_s h + x_t k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \right) + z_y \left( y_s h + y_t k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \right) + \varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2} \\ &= z + (z_x x_s + z_y y_s) h + (z_x x_t + z_y y_t) k + \left( z_x \varepsilon_1(h, k) + z_y \varepsilon_2(h, k) + \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) \sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\varepsilon(h, k) = z_x \varepsilon_1(h, k) + z_y \varepsilon_2(h, k) + \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくと  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立するので ( $\rightarrow$  演習問題 2.5), 定理が示される。

#### 演習問題 2.4

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

に対し  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立するとき,  $z$  は全微分可能であり,  $A = z_x(x, y)$ ,  $B = z_y(x, y)$  が成立することを示せ<sup>(1)</sup>。

**演習問題 \*2.5** 定理 2.11 の証明中で仮定した次を証明せよ。

$$\varepsilon(h, k) = z_x \varepsilon_1(h, k) + z_y \varepsilon_2(h, k) + \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくと  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立する。

<sup>(1)</sup> 前節の全微分可能の定義では分かり易さを考慮して, 偏微分可能なことを仮定したが, 上を全微分可能性の定義にするのが一般的である。

関数  $z = f(x, y)$  の導関数  $f_x, f_y$  が偏微分可能のとき更に導関数を考える事ができる。 $f_x$  の  $x$  に関する導関数  $(f_x)_x$  および  $y$  に関する導関数  $(f_x)_y$  をそれぞれ

$$f_{xx}, f_{xy}$$

と書く。また  $f_y$  の導関数も同様に定義できる。これらを 2 階の偏導関数 (2 次偏導関数) と呼ぶ。 $\frac{\partial z}{\partial x}$  の表し方で言うと、 $\frac{\partial z}{\partial x}$  を  $x$  で微分した関数は  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  から  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  と書く。同様に  $\frac{\partial z}{\partial x}$  を  $y$  で微分した関数は  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  から  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  と書く。 $\frac{\partial z}{\partial y}$  を  $x$  で微分した関数は  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$  から  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  と表す。 $\frac{\partial z}{\partial y}$  を  $y$  で微分した関数は  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$  から  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  と表す。3 階以上の偏導関数も同様に定義される。

$z = f(x, y)$  の 2 階の偏導関数は 4 つあり

$$z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

である。 $z = f(x, y)$  の 3 階の偏導関数は 8 つあり

$$z_{xxx}, z_{xxy}, z_{xyx}, z_{xyy}, z_{yxx}, z_{yyx}, z_{yyy}$$

あるいはライプニッツ流に書くと

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

である。

$f_{xy}$  は  $f$  を最初は  $x$  で微分し次に  $y$  で微分したものである。 $f_{yx}$  は  $f$  を最初は  $y$  で微分し次に  $x$  で微分したものであり、この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。このことについては後 (2.6 節) で取り上げる。

**演習問題 2.6** 次の関数について  $z_s, z_t$  および  $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$  を求めよ。

- (1)  $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$
- (2)  $z = \sin(x^2 + y^2), x = s + t, y = st$
- (3)  $z = \sin(x + 2y), x = \frac{t}{s}, y = \frac{s}{t}$

合成関数の微分法は次の形の様に行列で考えた方が分かりやすいかもしれない。

**定義 2.12** 2 変数関数の組  $x = x(s, t), y = y(s, t)$  に対し

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

をこの関数（の組）のヤコビ行列といい、この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \det \left( \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \right)$$

で表わし、ヤコビアン（ヤコビ行列式）という。ヤコビ行列を用いると定理 2.11 は次のように書き直することができる。

**定理 2.13** 2つの関数の組  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  と  $u = u(s, t)$ ,  $v = v(s, t)$  に対し

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(s, t)}$$

が成立する。

特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^{-1}$$

となる。

**演習問題 2.7** 次の場合に  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$  及び  $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$  を求めよ。

- (1)  $x = v^2, y = u^2$  (2)  $x = u^2 - v^2, y = 2uv$   
 (3)  $x = u \cos v, y = u \sin v$  (4)  $x = u, y = u + v$

**演習問題 2.8** 次の関数に対し  $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$  を求めよ。

- (1)  $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$  (2)  $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$   
 (3)  $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$  (4)  $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$   
 (5)  $z = xy, s = x, t = x + y$  (6)  $z = xy, s = x \cos y, t = x \sin y$

**演習問題 2.9**  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とする (2次元の極座標表示)。ヤコビ行列  $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$  および

ヤコビアン  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$  を計算し、関数  $z = f(x, y)$  に対し次を示せ。

- (1)  $\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$   
 (2)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

**演習問題 2.10**

(1)  $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha, y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$  ( $\alpha$  は定数) のとき次を示せ。

- 1)  $z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$   
 2)  $z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$

(2)  $x + y = e^{u+v}, x - y = e^{u-v}$  に対し  $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$  が成立することを示せ。

(3)  $x + y = u, y = uv$  ならば  $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$  となる事を示せ。

## 2.5 3変数関数の微分

今まで2変数関数の微分について学んだ。ここでは3変数関数について見る。2変数関数の場合とほとんど平行に議論が進む事が確認出来る。

**定義 2.14** 関数  $y = f(x_1, x_2, x_3)$  が  $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3)$  で  $x_1$  に関して偏微分可能とは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h}$$

が収束する事を言う。  $x_2, x_3$  にかんしても同様に定義できる。

$x_1, x_2$  及び  $x_3$  に関して偏微分可能の時、単に偏微分可能と言う。各点で偏微分可能の時 1 変数と同じ様に導関数を考える事ができる。これらを  $x_1$  に関する (または  $x_2, x_3$  に関する) 偏導関数と言う。  $x_1$  に関する偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad f_{x_1} \quad z_{x_1}$$

等書かれる。

3 変数関数の場合全微分可能性は幾何的には「接空間の存在」を意味する。

**定義 2.15**  $y = f(x_1, x_2, x_3)$  は点  $(a_1, a_2, a_3)$  のまわりで定義されていて、  $(a_1, a_2, a_3)$  で微分可能とする。

$\varepsilon(h_1, h_2, h_3) =$

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - f(a_1, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3)h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1, a_2, a_3)h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

とおく。  $f(x_1, x_2, x_3)$  が  $(a_1, a_2, a_3)$  で全微分可能とは

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)} \varepsilon(h_1, h_2, h_3) = 0$$

となる時をいう。

合成関数に関しても 2 変数と同様の結果が成立する。

**定理 2.16**  $y = f(x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$ ,  $x_3 = x_3(t)$  のとき

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

**定義 2.17** 3 変数関数 3 個の組  $x_1 = x_1(t_1, t_2, t_3)$ ,  $x_2 = x_2(t_1, t_2, t_3)$ ,  $x_3 = x_3(t_1, t_2, t_3)$  に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{pmatrix}$$

をこの関数 (の組) のヤコビ行列という。この行列の行列式を

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = \det \left( \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} \right)$$

で表し、ヤコビアンという。

**定理 2.18** 3つの関数の組  $x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$ ,  $x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3)$ ,  $x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$  と  $u_1 = u_1(t_1, t_2, t_3)$ ,  $u_2 = u_2(t_1, t_2, t_3)$ ,  $u_3 = u_3(t_1, t_2, t_3)$  に対し

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}$$

が成立する。特に逆関数に関しては

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \left( \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \right)^{-1}$$

となる。

**演習問題 2.11** 次の関数の偏導関数を求めよ。

- (1)  $w = f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$  (2)  $w = xyz \sin(x^2 + y^2 + z^2)$   
 (3)  $e^{x^2 + y^3 + z^4}$  (4)  $x^2 y^3 \log(x^2 + y^3 + z^4)$

**演習問題 2.12** 次の場合に  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$  及び  $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$  を求めよ。

- (1)  $x = v^2, y = w^2, z = u^2$  (2)  $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$   
 (3)  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + w$  (4)  $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

**演習問題 2.13** 次の関数に対し  $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$  を求めよ。

- (1)  $w = x^3 + y^3 + z^3, x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$   
 (2)  $w = x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$

**演習問題 2.14**  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$  とする (3次元の極座標表示)。関数  $w = f(x, y, z)$  に対し次を示せ。

- (1) ヤコビアン  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$  を計算せよ。  
 (2)  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$   
 (3)  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$