2.6　高階偏導関数とテーラーの定理

この節では関数は**何回でも微分できる**ことを仮定し，それを特に断らないことにする。

f_{xy} は f を最初は x で微分し次に y で微分したものである。f_{yx} は f を最初は y で微分し次に x で微分したものであり，この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の元では一致する。

定理 2.19 [シュワルツの定理] 点 (a,b) の近傍で，f_x, f_y, f_{xy} が存在して，f_{xy} が (a,b) で連続ならば，f_{yx} も存在して $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ が成立する。

演習問題 *2.15　定理 2.19 を証明せよ (テキスト p83 参照)。

定義 2.20 関数 $f(x,y)$ に対し f_x および f_y が存在して，f_x および f_y が連続であるとき関数 $f(x,y)$ は C^1 **級**であるという。定理 2.10 より C^1 級であれば全微分可能である。

f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} および f_{yy} が存在してすべての 2 階の偏導関数が連続のとき関数 $f(x,y)$ は C^2 **級**であるという。f が C^2 級のとき $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する。

関数 $f(x,y)$ が n 階までの導関数がすべて存在して連続であれば C^n **級**であるという。関数 $f(x,y)$ が C^n 級であれば，n 階までの導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る (→ 演習問題 2.16)。

演習問題 2.16　上でのべた事を証明せよ。即ち系を仮定して次を示せ。

(1) $z = f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) * $z = f(x,y)$ が C^n 級であるとする。α を x または y が k 個 $(0 \leqq k \leqq n-2)$ 並んだもの，β を x または y が $n-k-2$ 個並んだものとすると

$$z_{\alpha xy\beta} = z_{\alpha yx\beta}$$

が成立する。例えば $\alpha = xy, \beta = yy$ のときは $z_{xyxyyy} = z_{xyyxyy}$ を意味する。

(3) * $z = f(x,y)$ が C^n 級ならば n 階の導関数は x, y で微分した回数が同じであればその順序によらず決る。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと，定理を書き下すだけで結構な手間である。

定義 2.21 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を独立したものとして扱い $\dfrac{\partial}{\partial x}f$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が f に作用していると見なす。このとき形式的に $D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ と定義し，Df を $Df = h\dfrac{\partial}{\partial x}f + k\dfrac{\partial}{\partial y}f$ と定義する。また $D^2 = \left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ なので

$$D^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f$$

と考える。一般に $D^n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$ なので

$$D^n f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r}\partial y^r} f$$

と考える。

定理 2.22 [テーラーの定理]

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + Df(a,b) + \cdots + \frac{1}{r!}D^r f(a,b) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}f(a,b) \\ &\quad + \frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。

$z = f(x,y) = x^2e^y$ に対し $(a,b) = (1,1)$ でテーラー定理を用いて展開して見よう。1 変数の定理の場合と同様に，定理の $\frac{1}{n!}D^n f(a+\theta h, b+\theta k)$ の項を剰余項といい R_n で表す。ここでは剰余項を無視した近似を考える。最初に $n=2$ の場合を考える。$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^y$ なので $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e$ である。よって

$$f(1+h, 1+k) \cong e + 2eh + ek$$

である。これは関数 f を $(1,1)$ の周りで h, k に関する 1 次式で近似している式である (今の場合は接平面の方程式)。1 変数のときと同じように「近似の最もよい 1 次式」を定義する。$x = a+h, y = b+k$ とする。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく。$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するとき，$A+Bh+Ck$ は (a,b) で $f(x,y) = f(a+h, b+k)$ を「最もよく近似する」1 次式と呼ぶ。この例でいうと $e+2eh+ek$ は $(a,b) = (1,1)$ で $f(x,y) = x^2e^y$ を最もよく近似する 1 次式である (証明は演習問題**??**)。

$n = 3$ の場合は

$$f(1+h, 1+k) \cong e + 2eh + ek + eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2}ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}$$

とおく。$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するとき，$A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2$ は (a,b) で $f(x,y) = f(a+h, b+k)$ を「最もよく近似する」2 次式と呼ぶ。この例でいうと $e + 2eh + ek + eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2}ek^2$ は $(a,b) = (1,1)$ で $f(x,y) = x^2e^y$ を最もよく近似する 2 次式である (証明は演習問題**??**)。

n を大きくしていくと高い次数の式による近似になり，一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。$g(h,k)$ を h,k に関する n 次式とする。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h,b+k)-g(h,k)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^n}$$

とおく。$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立するとき，$g(h,k)$ は (a,b) で $f(x,y)$ を「最もよく近似する」n 次式と呼ぶ。この定義とテーラーの定理との関連については演習問題 **??**参照のこと。

1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。極値問題への応用は次節で扱う。

演習問題 2.17　次の関数を (a,b) において最もよく近似する 1 次式，2 次式および 3 次式求めよ。ただし 演習問題 **??**の結果は用いてもよい。

(1) $z = f(x,y) = (x-1)(y+2) \quad (a,b) = (0,0)$

(2) $z = f(x,y) = \dfrac{1}{1-2x+3y} \quad (a,b) = (0,0)$

(3) $z = f(x,y) = \sin(x+y) \quad (a,b) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

演習問題 ***2.18**

(1) $f(a,b) + Df(a,b)$ が (a,b) で $f(x,y)$ を最もよく近似する 1 次式であることを示せ。

(2) $f(a,b) + Df(a,b) + \dfrac{1}{2!}D^2 f(a,b)$ が (a,b) で $f(x,y)$ を最もよく近似する 2 次式であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j f(a,b)$ が (a,b) で $f(x,y)$ を最もよく近似する n 次式であることを示せ。