2.10　極値

ある点 (a,b) の周りで $f(a,b)$ の値が他の $f(x,y)$ より大きいとき**極大値**という。逆に他の値より小さいとき**極小値**という。正確に言うと，ある正数 δ が存在して，$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ならば $f(x,y)<f(a,b)$ が成立しているとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大といい，$f(a,b)$ を極大値という。極値の定義において $f(x,y)<f(a,b)$ を $f(x,y)\leqq f(a,b)$ に置き換えた概念を**広義の極大**といい，$f(a,b)$ を**広義の極大値**という。極小も同様に定義できる。極大値・極小値合わせて**極値**という。

関数 $z=f(x,y)$ が $f_x(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)=0$ を満たすとき，点 (a,b) を関数 $z=f(x,y)$ の**臨界点**と呼ぶ。1 変数関数と同様に $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で (広義の) 極値をとれば，(a,b) が臨界点である事が分かる。即ち次が成立する。

命題 2.34 (a,b) で f が (広義の) 極値をとるならば，(a,b) は f の臨界点である。

証明　f が (a,b) で広義の極大値をとるときのみ証明する。極小値も同様に示すことができる (→演習問題 2.28)。ある $\delta>0$ が存在して $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ ならば $f(a,b)\geqq f(x,y)$ が成立しているので絶対値が十分小さい h,k に対し

$$f(a+h,b)\leqq f(a,b),\qquad f(a,b+k)\leqq f(a,b)$$

が成立している。$h>0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\leqq 0$ が，$h<0$ のとき $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\geqq 0$ が成立している。よって $f_x(a,b)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=0$ となる。$k>0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\leqq 0$ が，$h<0$ のとき $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\geqq 0$ が成立している。よって $f_y(a,b)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=0$ となる。■

演習問題 2.28　(a,b) で f が (広義の) 極小値をとるならば，(a,b) は f の臨界点であることを示せ。

この逆の「臨界点ならば極値である」は一般に正しくない。極値を判定するため次を定義する。関数 $z=f(x,y)$ に対し

$$H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\bigl(f_{xy}(x,y)\bigr)^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}$$

を $z=f(x,y)$ の**ヘッシアン** (Hessian) と呼ぶ。ここで $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc$ は行列式を表す。このとき次が成立する。

定理 2.35 (a,b) を関数 $z=f(x,y)$ の臨界点とするとき，次が成立する。

(1) $H(a,b)>0$ のとき $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとる。

1) $f_{xx}(a,b)>0$ のとき $f(a,b)$ は極少値である。

2) $f_{xx}(a,b)<0$ のとき $f(a,b)$ は極大値である。

(2) $H(a,b)<0$ のとき極値でない。

(3) $H(a,b)=0$ のときはこれだけでは分らない。極値になる場合もならない場合もある。

例 2.36 定理 2.35 の証明はテキスト (p74) にまかせて，ここでは 2 次式に関して定理が成立していることを見よう。$z=f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ を考える。$z_x=2Ax+2By$，$z_y=2Bx+2Cy$ なので $(x,y)=(0,0)$ は臨界点である。$z_{xx}=2A$，$z_{xy}=2B$，$z_{yy}=2C$ なのでヘッシアンは $H=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4\left(AC-B^2\right)$ となる。$H'=\dfrac{1}{4}H=AC-B^2$ とおく。H' の正負と H の正負は同じである。最初に $H'>0$ かつ $A>0$ の場合を考える。$y=0$ のとき $f(x,0)=Ax^2$ となるので，$x\neq 0$ のとき $f(x,0)=Ax^2>0=f(0,0)$ となっている。$y\neq 0$ のとき $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)=A\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2B\left(\dfrac{x}{y}\right)+C$ である。$g(t)=At^2+2Bt+C$ とおくと，$H'>0$ かつ $A>0$ なので，任意の t に対し $g(t)>0$ である (H は $g(t)$ の判別式の符号を逆にしたもの)。よって $\dfrac{1}{y^2}f(x,y)>0$ となり，$f(x,y)>0$ が得られる。以上により $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)>f(0,0)$ なので $(0,0)$ で極小値をとる。$H'>0$ かつ $A<0$ のときは演習問題とする (→ 演習問題 2.29)。

次に $H'<0$ のときを考える。$g(t)=At^2+Bt+C$ のグラフは x 軸と交わるので $g(t)$ は正の値も負の値もとる。即ち $\exists t_1\ g(t_1)>0$ かつ $\exists t_2\ g(t_2)<0$ が成立する。このとき $t_1=\dfrac{x_1}{y_1}$ となる (x_1,y_1) に対して $f(x_1,y_1)=\dfrac{1}{y_1^2}g(t_1)>0$ となるので，$f(x_1,y_1)>0$ となる。(x_1,y_1) の代わりに $(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n}x_1,\dfrac{1}{n}y_1\right)$ を選んでも，$t_1=\dfrac{x_n}{y_n}$ となるので $f(x_n,y_n)>0$ となる。

$t_2=\dfrac{x_1'}{y_1'}$ となる (x_1',y_1') に対して $f(x_1',y_1')=\dfrac{1}{{y_1'}^2}g(t_2)<0$ となるので，$f(x_1',y_1')<0$ となる。(x_1',y_1') の代わりに $(x_n',y_n')=\left(\dfrac{1}{n}x_1',\dfrac{1}{n}y_1'\right)$ を選んでも，$t_2=\dfrac{x_n'}{y_n'}$ となるので $f(x_n',y_n')<0$ となる。$(0,0)$ にいくらでも近いところに $f(x_n,y_n)>0$ となる点 (x_n,y_n) と $f(x_n',y_n')<0$ となる点 (x_n',y_n') が存在するので $(0,0)$ は極値ではない。

例 2.37 $z=f(x,y)=x^4+y^4+2x^2y^2-2y^2$ の極値を調べよう。最初に極値候補となる臨界点を求めよう。$z_x=4x^3+4xy^2=0$, $z_y=4y^3+4x^2y-4y=0$ の共通解が求めるものになる。この連立方程式を実数の範囲で解くと $(x,y)=(0,0),(0,1),(0,-1)$ を得る。

$z_{xx}=12x^2+4y^2$, $z_{xy}=8xy$, $z_{yy}=12y^2+4x^2-4$ なので $H(0,\pm1)=32>0$, $H(0,0)=0$ となる。定理 2.35 より，z は $(0,\pm1)$ で極小である。$H(0,0)=0$ なので $(0,0)$ の様子は定理 2.35 からは分からない。個別に調べなければならない。この場合は極値になりそうもないと当りをつけてそれを示す。

x–軸上に制限して考えると，$f(x,0)=x^4$ である。x–軸上では $(0,0)$ は極小，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より大きな値を取る点が存在する。y–軸上に制限すると $f(0,y)=y^4-2y^2$ でこの 4 次関数は y–軸上では $(0,0)$ で極大，即ちいくらでも近くに $f(0,0)$ より小さい値を取る点が存在する。2 つを合わせると $(0,0)$ が極値でない事が分かる。

演習問題 2.29　例 2.37 において $H' > 0$ かつ $A < 0$ のとき $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大値をとることを示せ。

演習問題 2.30　次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$

(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \dfrac{ax+by}{x^2+y^2+1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

(4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ $(a > b > 0)$

(5) $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$

(6) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(7) $z = xy(x^2+y^2-1)$

(8) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

最大値・最小値を与える点は広義の極値になっているので，最大値・最小値を求めるとき極値問題を適用できる。次の例を考える。

辺の和が一定の直方体の中で体積最大になるものを求めよ。

3 辺の長さを x, y, z とする。和が一定なので，それを ℓ とすると，$x+y+z=\ell$ である。体積を V とすると，$V = xyz = xy(\ell - x - y)$ である。$\dfrac{\partial V}{\partial x} = y(\ell - 2x - y)$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = y(\ell - x - 2y)$ より，$\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ を連立させて解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ を得る。

この解法は一見よさそうに思われるが，良く考えてみると示しているのは『最大値が存在するならばそれは $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ である』という事だけである。最大値の存在証明もするためには以前述べた次の定理を必要とする。

定理 2.7 有界閉集合で定義された連続関数は最大値・最小値をとる。

また次の命題も必要になる。

命題 2.38 領域 D で定義された関数が最大値をとるとき次のいずれかである。

(1) 領域の内部の点であり，そこで広義の極値をとる。

(2) 境界上の点である。

上の問題についてもう一度厳密に解答しよう。そのためには有界閉集合の問題にする必要がある。つまり直方体だけでなく「つぶれた直方体」も考える必要が出て来る。$V = xy(\ell - x - y)$ とする $(\ell > 0)$。$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq \ell \right\}$ 上で V の最大値を求める問題を考える。D は有界閉集合で，V は連続関数なので最大値が存在する。境界上での値は $V = 0$ なので最大値は D の内部に存在する。よって広義の極値になっている。V の極値は $\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y} \right) = (0,0)$ となるが，これを解くと $x = y = \dfrac{\ell}{3}$ となるので，これが求めるもの。

演習問題 2.31

(1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。

(2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

2.11 陰関数

高校時代に次の様な議論をしたかもしれない。

$x^2+y^2=1$ を x で微分すると $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ なので，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ である。

式 $x^2+y^2=1$ は明示的に関数を定義しているわけではないが，陰覆的に定義してると考える。この議論をきちんと述べよう。

定義 2.39 関数 $F(x,y)$ と $F(a,b)=0$ となる点 (a,b) に対し，a の近傍[1]で定義された関数 $y=f(x)$ が存在して，1) 定義されている任意の x に対し $F(x,f(x))=0$，2) $b=f(a)$，が成立する時，F は点 (a,b) の近傍で，**陰関数** $y=f(x)$ を定めるという。またこの f を (a,b) の近傍で定まる陰関数という。

3 変数関数の場合は，関数 $F(x_1,x_2,y)$ と，$F(a_1,a_2,b)=0$ となる点 (a_1,a_2,b) に対し，(a_1,a_2) の近傍[2]で定義された関数 $y=f(x_1,x_2)$ が存在して $F(x_1,x_2,f(x_1,x_2))=0$，$b=f(a_1,a_2)$ が成立する時，F は点 (a_1,a_2,b) において，**陰関数** $y=f(x_1,x_2)$ を定めるという。

定理 2.40 $F(x,y)$ に対し $F(a,b)=0$，$F_y(a,b)\neq 0$ ならば a の近傍で陰関数 $y=f(x)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ である。

$F(x_1,x_2,y)$ に対し $F(a_1,a_2,b)=0$，$F_y(a_1,a_2,b)\neq 0$ ならば (a_1,a_2) の近傍で陰関数 $y=f(x_1,x_2)$ が存在する。この時，F が C^r 級なら f も C^r 級。$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=-\dfrac{F_{x_1}}{F_y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=-\dfrac{F_{x_2}}{F_y}$ である。

演習問題 2.32 次で与えられる陰関数に関し $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $F(x,y)=1-y+xe^y=0$

(2) $F(x,y)=x^3y^3+y-x=0$

(3) $F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ (デカルトの正葉線)

---

[1] 近傍とはある正数 δ が存在して $\{\,x\mid |x-a|<\delta\,\}$ となる集合の事。

[2] この場合の近傍とはある正数 δ が存在して $\left\{\,(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\,\right\}$ となる集合の事。