

3 1 変数関数の不定積分と微分方程式

ここでは微分方程式を解くために必要な 1 変数関数の不定積分についてのみ扱う。定積分は解析学 II で扱うが、定積分と不定積分の違いに関して一言だけふれておく。高校では不定積分 (原始関数) を用いて定積分が定義されていた。これは便法と考えるべきで、厳密には正しい定義とは言えない。

不定積分は微分の逆として定義されるものであるが、定積分は求積法と関係して定義されるものであり、直接には不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の関係にニュートン・ライプニッツが独立に気づいたとき微積分学が成立したといえる。この事は解析学 II で定積分の定義のときにもう一度ふれるが、この事をきちんと理解する事が積分の理論的把握のキーポイントである。

3.1 不定積分の定義と諸性質

数学序論で積分の基本的部分は学んでいるので、ここでは簡単に復習した後、数学序論で述べなかった幾つかの計算法について学ぶ。

関数 $F(x)$ が微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となるとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (primitive function) または不定積分 (indefinite integral) といい、

$$\int f(x) dx = F(x)$$

と表す。 $f(x)$ のことを被積分関数と呼ぶことがある。原始関数は $f(x)$ から一意的に決まるものではないが、定数分の差しかないので、

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

のように表す。この C を積分定数と呼ぶ。前期の数学序論では混乱する場合を除き通常省略したが、微分方程式を扱う場合は積分定数を書く必要がある。微分方程式に入ったら積分定数は書くことにする。またこの章の以下の部分で関数は積分可能であることを仮定し、そのことをいちいち断らないこととする。

次の諸命題に関しては前期で学んだ。

命題 3.1 [積分の線型性]

$$(1) \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(2) \int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

命題 3.2 [いくつかの関数の不定積分]

$$(1) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad (a \neq -1)$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$

$$(3) \int \cos x dx = \sin x$$

$$(4) \int \sin x dx = -\cos x$$

$$(5) \int e^x dx = e^x$$

$$(6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$$

$$(7) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$(8) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

定理 3.3 [置換積分法] $x = \varphi(t)$ とすると,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

置換積分は色々な場合に色々な形の変数変換が考案されている。詳しくは 3.3 節で扱う。

定理 3.4 [部分積分法]

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

3.2 諸計算 I (有理関数の不定積分)

有理関数は 2 次式または 1 次式に因数分解できれば, 積分を我々の知っている関数 (初等関数) で書く事ができる。積分方法を一般的に述べるのではなく, 具体例を取り上げて積分方法が分かる様に実行する事にする。 $I = \int \frac{x^4 + x^3 - x - 4}{x^3 - 1} dx$ を例にとる。

(1) 仮分数を帯分数へ

最初に分子の次数が分母の次数より大きければ帯分数の形にして分子の次数を小さくする。

$$\frac{x^4 + x^3 - x - 4}{x^3 - 1} = x + 1 - \frac{3}{x^3 - 1}$$

なので, $\frac{3}{x^3 - 1}$ の積分を求めればよい。

(2) 部分分数展開

部分分数展開をするために分母を因数分解する。

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

となる。

$$\frac{3}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

を満たす定数 a, b, c を見つける。分母を払うと $3 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$ が恒等的に成立しているので, $a = 1, b = -1, c = -2$ である。よって

$$\int \frac{3}{x^3 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

となる。

(3) 積分の実行

$\int \frac{1}{1\text{次式}} dx$ の積分は問題なし。実数の範囲で因数分解できない2次式に対し、 $\frac{1\text{次式}}{2\text{次式}}$ の積分は

$$\frac{1\text{次式}}{2\text{次式}} = A \frac{(2\text{次式})'}{2\text{次式}} + B \frac{1}{2\text{次式}}$$

と変形する。

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$$

となる。 $t = x^2 + x + 1$ とおくと $\frac{dt}{dx} = 2x + 1$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{2x+1}{t} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{2x+1}{t} \frac{1}{2x+1} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \log t = \log(x^2+x+1) \end{aligned}$$

となる。よってあとは $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ が求まればよい。

$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ となるので $u = x + \frac{1}{2}$ と変数変換すると $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right)$ となる。以上を合わせると

$$I = \frac{x^2}{2} + x - \log|x-1| + \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(4) 少し理論的に

任意の有理関数の不定積分が初等関数で表されるかどうかを考えてみる。

一般の有理関数を $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ とする。(1) の操作で分子の次数は分母の次数より小さいと仮定してよい。次に $g(x)$ の因数分解を実行する。アルゴリズムは存在しないが、実数の範囲で1次式または2次式に因数分解される事が知られている(代数学の基本定理)。同じ因数が2個以上存在する場合もあるので、部分分数を実行すると、次の形の関数の和になっている。

$$\frac{f_1(x)}{(x+a)^n}, \quad \frac{f_2(x)}{(x^2+ax+b)^n}$$

分母が $(x^2+ax+b)^n$ の場合は変数変換で $(x^2+a^2)^n$ と仮定してよい。分子を $(x+a)$ または (x^2+a^2) で展開することにより、 $\frac{f_1(x)}{(x+a)^n} = \frac{a_1}{x+a} + \dots + \frac{a_n}{(x+a)^n}$, $\frac{f_2(x)}{(x^2+a^2)^n} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+a^2} + \dots + \frac{b_nx+c_n}{(x^2+a^2)^n}$ とできる。以上により次の3つの積分ができればよい事が分かる。

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx, \quad \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

1 番目は $u = x + a$, 2 番目は $u = x^2 + a^2$ と置けばすぐできる。3 番目の積分を直接与えるのは難しいが次の漸化式により計算することができる。

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx \text{ とおくと, 漸化式}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right\}$$

が成立するので (\rightarrow 演習問題 3.1), この式により順次計算する事ができる。

演習問題 *3.1

(1) $I_n = \int \cos^n t dt$ とする。 $\cos^n t = \cos^{n-2} t \cos^2 t = \cos^{n-2} t (1 - \sin^2 t)$ を持ちいることにより
漸化式

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を示せ。

(2) $J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ とする。 $x = a \tan t$ とおくことにより

$$J_n = \frac{1}{a^{2n-1}} I_{2n-2}$$

が成立することを示せ。

(3)

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right\}$$

が成立することを示せ。

演習問題 3.2 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{1}{x(x-1)}$

(2) $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

(3) $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

(4) $\frac{x^3}{(x+1)^2}$

(5) $\frac{1}{x(x^4-1)}$

(6) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\frac{x-1}{x^2+2x+2}$

(8) $\frac{1}{x^3+1}$

(9) $\frac{1}{x^4+1}$

3.3 諸計算 II(置換積分)

1 3角関数の有理関数

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ の形の積分, ただしここで $R(s, t)$ は s と t の有理関数。

$t = \tan(x/2)$ とおくと, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ なので,

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

となり有理関数の積分に帰着できる。

$$I = \int \frac{1}{\sin x} dx \text{ は } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ と置くと,}$$

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

となる。

これは万能であるが最善の方法とは限らない。例えば、 $\tan x$ で表される時は $t = \tan x$ と置く方が一般に簡単になる。

$I = \int (\tan x)^2 dx$ の場合 $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ と置いても出来るが、計算は少し面倒である。このとき $t = \tan x$ と置くと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2 = 1 + t^2$ なので

$$I = \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt = t - \arctan t = \tan x - x$$

となる。

一方 $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{8t^2}{(1-t)^2(1+t)^2(1+t^2)} dt \\ &= \int \left\{ \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{2}{1+t^2} \right\} dt \\ &= -\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - 2 \arctan t \\ &= -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} - \frac{1}{\tan \frac{x}{2} - 1} - 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。前者の方が計算は簡単であろう。

演習問題 3.3 次の関数の不定積分を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \sin x \cos x & (2) \sin^3 x & (3) \frac{1}{\cos x} \\ (4) \frac{1}{\tan x} & (5) \frac{1}{1 + \sin x} & (6) \frac{1}{\sin x - \cos x} \end{array}$$

2 ルートの中の2次式(1)—3角関数

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ の形の積分、ただし、ここで $R(s, t)$ は s と t の有理関数。2通りの方法で計算をする。最初は3角関数を用いて変換するものを紹介し、次に無理式を用いるものを紹介する。3角関数を用いる変換の場合2次式はあらかじめ $a^2 - x^2, x^2 + a^2, x^2 - a^2$ のいずれかの形に変形されているものとする。

$$(1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

$x = a \sin t$ と置くと、

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int R(a \sin t, a \cos t) a \cos t dt$$

$$(2) \int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$$

$x = a \tan t$ と置くと,

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx = \int R\left(a \tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$(3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$x = \frac{a}{\sin t}$ と置くと,

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = - \int R\left(\frac{a}{\sin t}, \frac{a \cos t}{\sin t}\right) \frac{a \cos t}{\sin^2 t} dt$$

いずれの場合も 3 角関数の有理関数に帰着できる。

演習問題 3.4 次の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$(3) \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$$

$$(4) \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$(5) \sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0)$$

3 ルートの中の 2 次式 (2) — 無理関数

無理式を用いてルートの中に 2 次式がある場合の積分 $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ を求める。

(1) $a > 0$ の場合

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax} \text{ と置くと, } x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, dx = \frac{2\sqrt{at^2} + 2bt + 2\sqrt{ac}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt, t - \sqrt{ax} = \frac{\sqrt{at^2} + bt + c}{2\sqrt{at} + b} \text{ となるので}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \frac{\sqrt{at^2} + bt + c}{2\sqrt{at} + b}\right) \frac{2\sqrt{at^2} + 2bt + 2\sqrt{ac}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt$$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ が 2 解 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ を持つ時。 $a > 0$ の場合もできるがここでは $a < 0$

とする。 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ となる。 $t = \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$ または同じことだが

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha) \text{ と置くと, } x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, x - \alpha = \frac{a(\alpha - \beta)}{t^2 - a}, \frac{dx}{dt} = \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - a)^2}$$

より,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(t^2 - a)^2} dt$$

を得る。

演習問題 3.5 次の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$(3) \sqrt{x^2 + a}$$

$$(4) x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$$

方法の違いで結果が一見違うように見える時もある。例えば、 $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ を考える。3角関数で置換すると、

$$I = I_1 = -\arcsin \frac{1}{x}$$

となるが、無理式を用いると、

$$I = I_2 = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2-1})$$

となる。見かけは違うが、実は $I_2 = \pi + I_1$ となっている。

演習問題 3.6 今までは学んだ事に対応する演習問題で、演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$

(3) $\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$

(4) $x \arcsin x$

(5) $\frac{\cos 2x}{e^{3x}}$

(6) xe^{-x}

(7) $x \cos x$

(8) $x^2 \sin x$

(9) e^{3x+1}

(10) $2x \arctan x$

(11) $\log(2x+1)$

(12) $\frac{1}{x(\log x)^n}$

(13) $x^2 \log x$

(14) xe^{2x^2+3}

(15) $\frac{e^x}{x} + e^x \log x$

(16) $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

(17) $(2x+1) \sin(x^2+x+1)$

(18) $\cos^n x \sin x$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$

(20) $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$

(21) $\frac{x \arcsin x}{(1+x^2)^2}$

(22) $\sin(\log x)$

(23) $x^3 e^x$

(24) $x^4 e^x$

(25) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$

(26) $\frac{1}{1+x^2}$

(27) $\frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$

(28) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(29) $\frac{1}{\cos^8 x}$

(30) $\frac{1}{\sin x \cos^5 x}$

(31) $\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$

(32) $\frac{x}{\sqrt{a-x}}$

(33) $\frac{(a+bx^3)^{3/2}}{x}$

(34) $\frac{1}{3+\cos x}$

(35) $\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

(36) $\frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$

(37) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(38) $\sqrt{x^2-1}$

(39) $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(40) $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

(41) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(42) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$

(43) $\frac{1}{1+x\sqrt{1+x^2}}$

(44) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$

(45) $\frac{1-2x}{(3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

(46) $\frac{1}{(4-3x^2)\sqrt{3+4x^2}}$

(47) $\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

(48) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

$$(49) \frac{1}{4+x^2}$$

$$(52) 3x^2 e^{x^3+1}$$

$$(55) \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$(58) \frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 3}$$

$$(61) \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

$$(64) \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$(67) \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$(70) \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(73) \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$$

$$(76) \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

$$(79) \frac{1}{\cos x(5 + 3 \cos x)}$$

$$(82) \log(1 + \sqrt{x})$$

$$(85) 3x^2(x^3 + 5)^6$$

$$(88) e^{ax} \cos bx$$

$$(50) \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$(53) \frac{1}{x^3(x+1)}$$

$$(56) \frac{x^4 - x^3 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

$$(59) \frac{\sin^2 x}{1 + 3 \cos^2 x}$$

$$(62) \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$$

$$(65) \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

$$(68) \frac{\cos x}{\sin^n x}$$

$$(71) \frac{\log(\log x)}{x}$$

$$(74) \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$$

$$(77) \frac{1}{a + b \sin x}$$

$$(80) \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x$$

$$(83) \frac{1 + \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$(86) \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$$

$$(89) e^{ax} \sin bx$$

$$(51) \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$$

$$(54) \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$$

$$(57) \frac{3}{x^3-1}$$

$$(60) \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$(63) \frac{1}{a \cos x + b \sin x}$$

$$(66) \frac{1}{2 - \tan^2 x}$$

$$(69) \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$(72) \frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$$

$$(75) \frac{12}{x^3-8}$$

$$(78) \sin 4x$$

$$(81) \frac{\sin x}{3 + \tan^2 x}$$

$$(84) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$(87) \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$