解析学 I 問題解説 #3

河野

演習問題 1.1　次の関数 $f(x)$ は連続かどうか調べよ。

(1) $y = f(x) = x^2 + ax + b$　　(2) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

(3) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(1)　$y = x^n$ に関しては $\lim_{x\to\alpha} x^n = \alpha^n$ が成立する。また和の極限については極限の和になるので，任意の実数 α に対し

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha} f(x) &= \lim_{x\to\alpha}\left(x^2+ax+b\right)\\ &= \lim_{x\to\alpha} x^2 + \lim_{x\to\alpha}(ax) + \lim_{x\to\alpha} b\\ &= \lim_{x\to\alpha} x^2 + a\lim_{x\to\alpha} x + \lim_{x\to\alpha} b\\ &= \alpha^2 + a\alpha + b = f(\alpha)\end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ は連続関数である。

(2)　講義で述べたように定義域をどこと考えるかが重要である。問題文では意図的に定義域を明確に書かなかった。定義域をどう考えるかで変わって来るからである。ここでは定義できる最大の領域として，定義域を $D = \mathbb{R} - \{0\}$ とする。任意の $\alpha \in D$ に対し

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha}\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} = f(\alpha)$$

ので $f(x)$ は連続関数である。

(3)　任意の実数 x に対し $x^2+1 \geqq 1$ なので分母が 0 になることはない。よって関数 $f(x)$ はすべての実数で定義される。任意の実数 a に対し

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\lim_{x\to a} x^2+1} = \frac{1}{a^2+1} = f(a)$$

が成立するので $f(x)$ は連続である。

演習問題 1.2　近似の一番よい 3 次式を求めよ。また近似の一番よい 4 次式式を求めよ。ここで近似の一番よい 3 次式とは $d(h) = f(a+h) - (Ah^3 + Bh^2 + Ch + D)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。近似の一番よい 4 次式とは $d(h) = f(a+h) - (Ah^4 + Bh^3 + Ch^2 + Dh + E)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^4}$ とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

最初に 3 次式で近似する。

$$d(h) = f(a+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3)$$

$$\varepsilon(h) = \frac{d(h)}{h^3}$$

とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立している。$d(h)=\varepsilon(h)h^3$ なので $\lim_{h\to 0}d(h)=0$ が成立している。よって

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} d(h) \\
&= \lim_{h\to 0}\Big(f(a+h)-(A+Bh+Ch^2+Dh^3)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} f(a+h)-\lim_{h\to 0}(A+Bh+Ch^2+Dh^3)=f(a)-A
\end{aligned}
$$

となるので $A=f(a)$ である。

$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h^2=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\big(f(a)+Bh+Ch^2+Dh^3\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\big(B+Ch+Dh^2\big) \\
&= f'(a)-B
\end{aligned}
$$

となるので $B=f'(a)$ である。

$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)h=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\big(f(a)+f'(a)h+Ch^2+Dh^3\big)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-2Ch-3Dh^2}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-2C-6Dh}{2} \\
&= \frac{f''(a)-2C}{2}
\end{aligned}
$$

となるので $C=\dfrac{f''(a)}{2}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$\lim_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h^3}=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-\big(f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+Dh^3\big)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-f''(a)h-3Dh^2}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)-f''(a)-6Dh}{6h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'''(a+h)-6D}{6} \\
&= \frac{f'''(a)-6D}{6}
\end{aligned}
$$

となるので $D = \dfrac{f'''(a)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 3 次式は

$$
f(x) = f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3
$$

である。

次に 4 次式での近似を考える。

$$
\begin{aligned}
d(h) &= f(a+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) \\
\varepsilon(h) &= \frac{d(h)}{h^4}
\end{aligned}
$$

とおくとき $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。$d(h) = \varepsilon(h)h^4$ なので $\lim_{h\to 0} d(h) = 0$ が成立している。よって

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} d(h) \\
&= \lim_{h\to 0} \Big(f(a+h) - (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) \Big) \\
&= \lim_{h\to 0} f(a+h) - \lim_{h\to 0} (A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4) = f(a) - A
\end{aligned}
$$

となるので $A = f(a)$ である。

$\lim_{h\to 0} \dfrac{d(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^3 = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - \big(f(a) + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} \big(B + Ch + Dh^2 + Eh^3\big) \\
&= f'(a) - B
\end{aligned}
$$

となるので $B = f'(a)$ である。

$\lim_{h\to 0} \dfrac{d(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h^2 = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - \big(f(a) + f'(a)h + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4\big)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - 2Ch - 3Dh^2 - 4Eh^3}{2h}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f''(a+h) - 2C - 6Dh - 12Eh^2}{2} = \frac{f''(a) - 2C}{2}$$

となるので $C = \dfrac{f''(a)}{2}$ である。

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^3} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)h = 0$ なので

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - \left(f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + Dh^3 + Eh^4\right)}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - f''(a)h - 3Dh^2 - 4Eh^3}{3h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f''(a+h) - f''(a) - 6Dh - 12Eh^2}{6h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'''(a+h) - 6D - 24Eh}{6} = \frac{f'''(a) - 6D}{6}
\end{aligned}$$

となるので $D = \dfrac{f'''(a)}{6}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^4} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ なので

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{d(h)}{h^4} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - \left(f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + Eh^4\right)}{h^4} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - f''(a)h - \frac{f'''(a)}{2}h^2 - 4Eh^3}{4h^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f''(a+h) - f''(a) - f'''(a)h - 12Eh^2}{12h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'''(a+h) - f'''(a) - 24Eh}{24h} \\
&= \frac{f''''(a+h) - 24E}{24} = \frac{f''''(a) - 24E}{24}
\end{aligned}$$

となるので $E = \dfrac{f''''(a)}{24}$ である。ただし変形の途中でロピタルの定理を用いた。

以上により最も近似のよい 4 次式は

$$f(x) = f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f''''(a)}{24}h^4$$

である。

演習問題 1.3　次の関数 $y = f(x)$ を $x = a$ で一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式，4 次式を求めよ。

(1) $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\quad$ (a=0) (2) $f(x)=e^x \quad (a=1)$
(3) $f(x)=(x+1)^5 \quad (a=0)$

(1) $f'(x)=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f''(x)=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f^{(3)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f^{(4)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ なので $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f'(0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f''(0)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f^{(3)}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f^{(4)}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。演習問題 1.2 より $x=0$ で $f(x)$ を一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式，4 次式はそれぞれ

$$\begin{aligned} f(x)=f(0+h) &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}h \\ &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}h-\frac{1}{2\sqrt{2}}h^2 \\ &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}h-\frac{1}{2\sqrt{2}}h^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}h^3 \\ &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}h-\frac{1}{2\sqrt{2}}h^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}h^3+\frac{1}{24\sqrt{2}}h^4 \end{aligned}$$

である。
(2) $f'(x)=e^x$ より任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(x)=e^x$ である。$f(1)=f'(1)=f^{(2)}(1)=f^{(3)}(1)=f^{(4)}(1)=e$ なので

$$\begin{aligned} f(x)=f(1+h) &\fallingdotseq e+eh \\ &\fallingdotseq e+eh+\frac{e}{2}h^2 \\ &\fallingdotseq e+eh+\frac{e}{2}h^2+\frac{e}{6}h^3 \\ &\fallingdotseq e+eh+\frac{e}{2}h^2+\frac{e}{6}h^3+\frac{e}{24}h^4 \end{aligned}$$

である。
(3) $f'(x)=5(x+1)^4$，$f''(x)=20(x+1)^3$，$f^{(3)}(x)=60(x+1)^2$，$f^{(4)}(x)=120(x+1)^1$ より $f(0)=1$，$f'(0)=5$，$f''(0)=20$，$f^{(3)}(0)=60$，$f^{(4)}(0)=120$ となる。よって

$$\begin{aligned} f(x)=f(0+h) &\fallingdotseq 1+5h \\ &\fallingdotseq 1+5h+10h^2 \\ &\fallingdotseq 1+5h+10h^2+10h^3 \\ &\fallingdotseq 1+5h+10h^2+10h^3+5h^4 \end{aligned}$$

である。