解析学 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.4　実際に (1) を用いて (2) を証明せよ。

$F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

である。(1) より $F(x)$ は定数関数となるので，ある定数 C が存在して，$F(x) = C$ となる。このとき $f(x) - g(x) = C$ なので $f(x) = g(x) + C$ となっている。

演習問題 1.5　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき $f'(c) > 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 即ち $f(x_1) < f(x_2)$ となる。よって f は単調増加である。

演習問題 1.6　(1) を証明せよ。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき $f'(c) \geqq 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$ 即ち $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。

演習問題 *1.7　定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a) = g(a) = 0$ あるいは，$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ となるとき，$\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

最初に $f(a) = g(a) = 0$ の場合を証明する。$\lim_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ および $\lim_{x \to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ を証明すれば $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が証明される。

$x > a$ とする $f(a) = g(a) = 0$ なので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

が成立している。このとき定理 1.18 より $a<c<x$ となる c で

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

となるものが存在する。$x\to a+0$ とすると $c\to a+0$ となるので

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。$x<a$ の場合も同様なので省略する。

次に $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ の場合を考える。$F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ $(x\neq a)$，$F(a)=0$，$G(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ $(x\neq a)$，$G(a)=0$，とおくと F および G は $x=a$ で連続である。F,G に今証明したロピタルの定理の $f(a)=g(a)=0$ の場合を適用すると

$$\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。ここで $f(x)F(x)=1$ より $f'(x)F(x)+f(x)F'(x)=0$ 即ち $F'(x)=-\dfrac{f'(x)F(x)}{f(x)}$ が成立する。同様に $G'(x)=-\dfrac{g'(x)G(x)}{g(x)}$ が成立する。上式に代入すると

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\frac{g(x)}{f(x)}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。これを整理する

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる。ただし途中 $\lim_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}$ の収束を仮定した。

演習問題 1.8　次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x^4$

(2) $f(x)=\log(x+1)$

(3) $f(x)=x^3e^x$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

(5) $f(x)=\sin x$

(6) $f(x)=x^3\log x$

(1)　$f'(x)=4x^3$，$f''(x)=12x^2$，$f^{(3)}(x)=24x$，$f^{(4)}(x)=24$，$f^{(5)}(x)=0$，$f^{(n)}(x)=0$ $(n\geqq 0)$ となる。この書き方でもよいが，少し「格好つける」なら順列の記号 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を用いて

$$f^{(n)}(x)={}_4P_nx^{4-n}$$

としてもよい。

(2)　$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-(x+1)^{-2}$，$f^{(3)}(x)=2(x+1)^{-3}$，$f^{(4)}(x)=-6(x+1)^{-4}$ なので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。ここで，数学的帰納法について説明しておく (理解している人はとばして下さい)。数学的帰納法とは，自然数 n に関する命題 $P(n)$ があって，命題

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

を証明するときに用いられる 1 つの有力な方法である。即ち
(a) $P(1)$ は正しい
(b) 自然数 k に対し $P(k)$ が正しければ $P(k+1)$ が正しい
の 2 つを証明することで「$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$」を証明する論法である。数学的帰納法を適用するためには，証明すべき命題が予め予想されている必要がある。通常は $n = 1, 2, 3, \ldots$ と調べて，一般の n の場合を予想して，それを証明する。予想が正しくない場合は「証明」の途中で辻褄が合わなくなるので，予想が間違っていることに気がつく。

$n = 1$ のとき

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (-1)^{1+1}(1-1)!(x+1)^{-1}$$

なので予想は正しい。$n = k$ のとき予想が正しいと仮定する。即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}$ の成立を仮定する。このとき $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると，

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\
&= \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+1)^{-k-1} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!(x+1)^{-(k+1)}
\end{aligned}$$

となるので $k+1$ のときも成立する。

(3) ライプニッツの定理

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を用いる。$f(x)$ は関数に用いられているので，定理の $f(x)$ を $g(x)$ に $g(x)$ を $h(x)$ に変更して，$g(x) = e^x$，$h(x) = x^3$ とすると，$h'(x) = 3x^2$，$h''(x) = 6x$，$h^{(3)}(x) = 6$，$h^{(k)}(x) = 0\ (k \geqq 4)$ および $g^{(n)}(x) = e^x$ である。よって

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(n)}(x)h(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x)h^{(1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(n-2)}(x)h^{(2)}(x) + \binom{n}{3} g^{(n-3)}(x)h^{(3)}(x) \\
&= e^x x^3 + ne^x 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} e^x 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} e^x 6 \\
&= \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right) e^x
\end{aligned}$$

となる。

(4) 部分分数展開して

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

とできるので

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} - (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

と予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。$n=1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x-1}\right)' \\ &= -x^{-2} + (x-1)^{-2} \\ &= (-1)^1 1! \frac{1}{x^{1+1}} - (-1)^1 1! \frac{1}{(x-1)^{1+1}} \end{aligned}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \frac{1}{x^{k+1}} - (-1)^k k! \frac{1}{(x-1)^{k+1}}$$

の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= (-1)^k k! \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' - (-1)^k k! \left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{x^{k+2}} - (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}} \\ & (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{x^{(k+1)+1}} - (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(x-1)^{(k+1)+1}} \end{aligned}$$

となる。よって $k+1$ のときも成立している。

(5) $f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f^{(3)}(x) = -\cos x$，$f^{(4)}(x) = \sin x$ より

$$f^{(4m)}(x) = \sin x, \quad f^{(4m+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4m+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4m+3)}(x) = -\cos x$$

となる。場合分けによらない書き方もある。$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ となるので，$f''(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(3)} = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$ となるので一般に

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

とも表すことができる。

(6) ライプニッツの定理を用いてもよいが，何回か微分してみる。$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$，$f''(x) = 6x \log x + 5x$，$f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11$，$f^{(4)}(x) = \dfrac{6}{x}$ なので 4 次以上の導関数は $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を用いると，次が得られる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \log x + x^2 \\ f''(x) &= 6x \log x + 5x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \log x + 11 \\ f^{(n)}(x) &= (-1)n6(n-4)! \frac{1}{x^{n-3}} \quad (n \geqq 4) \end{aligned}$$

演習問題 1.9　次の関数の $x=0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x)=\log(1+x)$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}$　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(1)　$f(x)=\log(1+x)$ に対しては，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$，となる。$n$ 次導関数は $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x)=\frac{1}{1+x}=(-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}
\end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+0)^k}=(-1)^{k+1}(k-1)!$，および $f(0)=\log(1+0)=\log 1=0$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\
&= f(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-1)^{k+1}(k-1)!x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k
\end{aligned}$$

となる。$\sum$ を用いず

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

数学的帰納法の形式だけを書いて実際は何も証明していない，間違った証明をする学生がいる。この問題の数学的帰納法の部分の間違った「証明」を次に書く。間違いを見つけられない人は，理解している友達か私に質問して下さい。

n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。n に $k+1$ を代入すると

$$f^{(k+1)}(x) \quad = \quad (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，$f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$，$f'''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' \\ &= k!\frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

が成立する。

0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(1-0)^{k+1}} = k!$，が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

(3) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$，$f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}$，

$f'''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3}$，となる。$n$ 次導関数は

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

と予想される。これを証明する前に $n(n-2)(n-4)\cdots$ の積の表し方を見ておく。最初に n が偶数の場合を考える；即ち n が $2n$ という形をしている場合を考える。

$$\begin{aligned} 2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2 &= 2\cdot n \times 2\cdot(n-1)\times\cdots 2\cdot 2\times 2\cdot 1 \\ &= 2\cdot 2\cdots 2\times n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \\ &= 2^n n! \end{aligned}$$

と表すことができる。奇数の場合は

$$\begin{aligned} 2n+1\cdot 2n-1\cdots 3\cdot 1 &= \frac{2n+1\cdot 2n-1\cdots 3\cdot 1\times 2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{2n\cdot(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

上の表記を用いると

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n)} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!}(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

と予想される。ただしこの式は $n \geqq 2$ 以上で意味を持つ。よって数学的帰納法は $n=2$ を出発点とする。このときは 2 以上の自然数に対し命題が成立するという結果が得られるので，$n=0,1$ は別に考える必要がある。
(a) $n=2$ のとき：

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-2} = (-1)^{2-1}\frac{1}{2^2}\frac{(2\cdot 2-3)!}{2^{2-2}(2-2)!}(1-x)^{\frac{1}{2}-2}$$

なので $n=2$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\
&= \left((-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}\right)' \\
&= (-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}\left(\frac{1}{2}-k\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)} \\
&= (-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}\left(-\frac{2k-1}{2}\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\
&= (-1)^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}(2k-1)(1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\
&= (-1)^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}\frac{(2k-1)(2k-2)}{2k-2}(1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\
&= (-1)^{k}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}(1+x)^{\frac{1}{2}-k+1} \\
&= (-1)^{k+1-1}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(2(k+1)-3)!}{2^{(k+1)-2}((k+1)-2)!}(1+x)^{\frac{1}{2}-k+1}
\end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって 2 以上の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}\frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\dfrac{(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!}\quad (n \geqq 2)$，$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\
&= f(0)+f'(0)x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\
&= 1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}(k-2)!k!}x^k
\end{aligned}$$

となる。$(2n)!! = 2n(n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2$，$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 1$ という記号を用いて表示することも考えられるが，講義で紹介していないので採用しなかった。

(4) $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$，$f'''(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ と予想される。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = (-1)^1 \frac{1!}{(1+x)^{1+1}}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{(1+x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}\right)' \\ &= (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(1+x)^{k+2}} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(1+x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

が成立する。

0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = (-1)^k \dfrac{k!}{(1-0)^{k+1}} = (-1)^k k!$，が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

となる。

(5) n 次導関数を求めなくても，$f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。$1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)2x + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(x)2 = 0$$

となる。$x=0$ を代入することにより，$f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ を得る。$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2$ より

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

が成立することが予想される。

まず奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(0) = 0$」を示す。

(a) $n = 1$ のとき； $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ なので $f'(0) = 0$ となり，成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する;即ち $f^{(2k-1)}(0) = 0$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ が成立しているので，$n - 2 = 2k - 1$ とすると

$$f^{2k+1}(0) + (2k+1)2kf^{2k-1}(0) = 0$$

が得られる。よって $f^{2(k+1)-1}(0) = f^{2k+1}(0) = 0$ となり，$k+1$ のときも成立している。

次に偶数の場合を証明する。即ち即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$」を示す。

(a) $n = 0$ のとき； $f^{(0)}(0) = f(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = (-1)^0(2\cdot 0)!$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0) + n(n-1)f^{(n-2)}(0) = 0$ が成立しているので，$n - 2 = 2k$ とすると

$$f^{2k+2}(0) + (2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) = 0$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(0) &= -(2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) \\ &= -(2k+2)(2k+1)(-1)^k(2k)! \\ &= (-1)^{k+1}(2(k+1))! \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0)x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(0)x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k(2k)!x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

を得る。

演習問題 1.10　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$　　(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$　　(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

(1)　導関数を求めてもよいが，多項式なので

$$\begin{aligned} x^5 &= \Big((x-1)+1\Big)^5 \\ &= 1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5 \end{aligned}$$

と 2 項展開してもよい。
(2)　$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x)=e^x$$

となる。そこまでやる必要はないかもしれないが，一応数学的帰納法でこの事実を確認しておく。示すべき命題は「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x)=e^x$」である。
(a) $n=1$ のとき $f^{(1)}(x)=f'(x)=e^x$ なので成立している。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}=e^x$ を仮定する。このとき

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^k(x)\right)' \\ &= (e^x)'=e^x \end{aligned}$$

よってテーラー級数は

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(1)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(x-1)^k \end{aligned}$$

となる。
(3)　$f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f'''(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。よって

$$f^{2n}(x)=(-1)^n\sin x, \qquad f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x$$

と予想される。
　まず偶数の場合を証明する。即ち即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x$」を示す。
(a) $n=0$ のとき；$f^{(0)}(x)=f(x)=\sin x=(-1)^0\sin x$ なので成立している。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k)}(x)\right)'\right)' \\ &= \left(\left((-1)^k\sin x\right)'\right)' = \left((-1)^k\cos x\right)' \\ &= (-1)^k\left(-\sin x\right) \\ &= (-1)^{k+1}\sin x \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。
　次に奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x$」を示す。
(a) $n=1$ のとき；$f'(x)=(\sin x)'=\cos x=(-1)^{1+1}\cos x$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k+1}\cos x$ を仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(2(k+1)-1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k-1)}(x)\right)'\right)' \\ &= \left(\left((-1)^{k+1}\cos x\right)'\right)' = \left((-1)^{k+1}(-\sin x)\right)' \\ &= (-1)^{k+1}\left(-\cos x\right) \\ &= (-1)^{(k+1)+1}\cos x \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。$f^{(2k)}(\pi)=(-1)^k\sin\pi=0$，$f^{(2k-1)}(\pi)=(-1)^{k+1}\cos\pi=(-1)^{k+1}(-1)=(-1)^k$，なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(\pi)(x-\pi)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(\pi)(x-\pi)^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}(-1)^k(x-\pi)^{2k-1} \end{aligned}$$

を得る。

(4) $f(x)=\log x$ に対しては，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=\dfrac{-1}{x^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x)=\frac{1}{x}=(-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{x^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}\right)' \\ &= (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{-k}{x^{k+1}} \\ &= (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$，および $f(1) = \log 1 = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\
&= f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^{k+1}(k-1)!(x-1)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(x-1)^k
\end{aligned}
$$

となる。

$$f(x) = a_0 + a_(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

例えば，演習問題 1.9 (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき，この式の x に $-x$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\
&= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\
&= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)} \\
&= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots
\end{aligned}
$$

となり (5) を得る。