

演習問題 2.1 上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

$z = f(x, y)$ が原点において連続であるとは $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ が成立することである。原点で連続でないことを示すには、この極限が存在しないか、存在しても $f(0, 0) = 0$ でないことを示せばよい。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおいて極座標で考える。 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ と $r \rightarrow 0$ は同値である。 $f(x, y) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$ となるので極限值は θ に依存する。たとえば $\theta = 0$ のときは 0 であるが $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときは $\frac{1}{2}$ である。2変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で連続ではない。偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot k}{0^2 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

である。

演習問題 2.2 演習問題 2.1 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能でこの定義は

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立することである。

$(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{\frac{hk}{h^2 + k^2} - 0 - 0h - 0k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

となる。 $h = r \cos \theta, k = r \sin \theta$ とおくと

$$\varepsilon(h, k) = \frac{r \cos \theta r \sin \theta}{((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$$

となる。 $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ と $r \rightarrow 0$ は同値なので $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r}$ となる。これは収束しないので f は $(0, 0)$ において全微分可能ではない。

全微分可能な関数は連続であるので、そのことを使った別解もある。まずある点で全微分可能な関数はその点で連続であることを示す。 $z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能のとき

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおくとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立している。この式は

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

となる。このとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = f(a, b)$$

となるので (a, b) で連続である。

よって問題の関数が $(0, 0)$ で全微分可能であるとする $(0, 0)$ で連続である。しかし演習問題 2.1 よりこの関数は $(0, 0)$ で連続ではない。よって全微分可能ではない。

演習問題 2.3 次の関数の偏導関数を求めよ。

- | | |
|--|-----------------------------------|
| (1) $z = x^3 - 3xy + y^3$ | (2) $z = (x^3 + y^4)^{100}$ |
| (3) $z = \frac{x-y}{2x+3y}$ | (4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| (5) $z = e^{ax^2+by^2}$ | (6) $z = x \arctan \frac{x}{y}$ |
| (7) $z = xy \sin(x^2 + y^2)$ | (8) $z = x^2 y^2 \log(x^3 + y^3)$ |
| (9) $z = xy \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ | (10) $z = x^x y^y x^y y^x$ |

x に関する偏導関数は、 y を定数として x に関する 1 変数関数と見て微分すれば求まる。よって 1 変数関数の色々な定理を用いて計算することができる。ここでは結果のみ記しておく。

- | |
|---|
| (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2$ |
| (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 300(x^3 + y^4)^{99} x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 400(x^3 + y^4)^{99} y^3$ |
| (3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5y}{(2x+3y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5x}{(2x+3y)^2}$ |
| (4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ |
| (5) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2axe^{ax^2+by^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2bye^{ax^2+by^2}$ |
| (6) $\frac{\partial z}{\partial x} = \arctan \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ |
| (7) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \sin(x^2 + y^2) + 2x^2 y \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \sin(x^2 + y^2) + 2xy^2 \cos(x^2 + y^2)$ |

$$(8) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \log(x^3 + y^3) + \frac{3x^4 y^2}{x^3 + y^3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y \log(x^3 + y^3) + \frac{3x^2 y^4}{x^3 + y^3}$$

$$(9) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

(10)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^x (\log x + 1) y^x x^y y^x + x^x y^y x^{y-1} y^{x+1} + x^x y^y x^y y^x \log y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^x y^y (\log y + 1) x^y y^x + x^x y^y x^{y+1} y^{x-1} + x^x y^y x^y y^x \log x$$