解析学 I 問題解説 #7

河野

演習問題 2.4

$$z(x+h,y+k)=z(x,y)+Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

に対し $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立するとき，z は全微分可能であり，$A=z_x(x,y), B=z_y(x,y)$ が成立することを示せ。

$z(x+h,y)$ は $z(x+h,y+k)$ において $k=0$ としたものなので，

$$z(x+h,y)=z(x,y)+Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2+0^2}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\lim_{h\to 0}\frac{z(x+h,y)-z(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2+0^2}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\right)=A\end{aligned}$$

となる。よって z は x に関して偏微分可能であり，$z_x=A$ となる。

$z(x,y+k)$ は $z(x+h,y+k)$ において $h=0$ としたものなので，

$$z(x,y+k)=z(x,y)+Bk+\varepsilon(0,k)\sqrt{0^2+k^2}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\lim_{k\to 0}\frac{z(x,y+k)-z(x,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{Bk+\varepsilon(0,k)\sqrt{0^2+k^2}}{k}\\&=\lim_{k\to 0}\left(B+\varepsilon(0,k)\frac{|k|}{k}\right)=B\end{aligned}$$

となる。よって z は y に関して偏微分可能であり，$z_y=B$ となる。

z が偏微分可能であれば問題の等号成立は全微分可能性の定義と同じであるので，全微分可能である。

演習問題 *2.5　定理 2.11 の証明中で仮定した次を証明せよ。

$$\varepsilon(h,k)=z_x\varepsilon_1(h,k)+z_y\varepsilon_2(h,k)+\frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立する。

$(h,k)\to(0,0)$ のとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_1(h,k)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_2(h,k)=0$ が成立するので，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ を示せばよい。

$(h,k)\to(0,0)$ のとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} H=0$ および $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} K=0$ が成立するので，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_3(H,K)=0$$

が成立することに注意しておく。また

$$|h| \leqq \sqrt{h^2+k^2}, \quad |k| \leqq \sqrt{h^2+k^2}$$

が成立することにも注意しておく。簡単のため $x_s(s,t), x_t(s,t), y_s(s,t), y_t(s,t), \varepsilon_1(h,k), \varepsilon_2(h,k)$ をそれぞれ $x_s, x_t, y_s, y_t, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ と略記すると，

$$H = x_s h + x_t k + \varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2}$$
$$K = y_s h + y_t k + \varepsilon_2\sqrt{h^2+k^2}$$

と書ける。

$$\begin{aligned}
H^2 &= \left(x_s h + x_t k + \varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2}\right)^2 \\
&= x_s^2h^2 + x_t^2k^2 + \varepsilon_1^2(h^2+k^2) + 2x_shx_tk + 2x_sh\varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2} + 2x_tk\varepsilon_1\sqrt{h^2+k^2} \\
&\leqq x_s^2h^2 + x_t^2k^2 + \varepsilon_1^2(h^2+k^2) + 2|x_s||x_t||h||k| + 2|x_s||\varepsilon_1||h|\sqrt{h^2+k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1||k|\sqrt{h^2+k^2} \\
&\leqq x_s^2(h^2+k^2) + x_t^2(h^2+k^2) + \varepsilon_1^2(h^2+k^2) + 2|x_s||x_t|(h^2+k^2) \\
&\qquad\qquad + 2|x_s||\varepsilon_1|\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1|\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+k^2} \\
&= \left(x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|\right)(h^2+k^2)
\end{aligned}$$

となるので $S = x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|$ とおくと $H^2 \leqq S(h^2+k^2)$ が得られる。同様の議論で $T = y_s^2 + y_t^2 + \varepsilon_2^2 + 2|y_s||y_t| + 2|y_s||\varepsilon_2| + 2|y_t||\varepsilon_2|$ とおくと $K^2 \leqq T(h^2+k^2)$ が得られる。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varepsilon(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{h^2+k^2}\right| &\leqq |\varepsilon(H,K)|\frac{\sqrt{S(h^2+k^2)+T(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= |\varepsilon(H,K)|\frac{\sqrt{S+T}\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= |\varepsilon(H,K)|\sqrt{S+T}
\end{aligned}$$

から $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_3(H,K)\sqrt{H^2+K^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ が成立することが分かる。

演習問題 2.6　次の関数について z_s, z_t および $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$ を求めよ。

(1) $z = \sin x\cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$
(2) $z = \sin(x^2+y^2), x = s+t, y = st$
(3) $z = \sin(x+2y), x = \dfrac{t}{s}, y = \dfrac{s}{t}$

(1) $z_x = \cos x \cos y, z_y = -\sin x \sin y$，$x_s = 2s, x_t = -2t$，$y_s = 2t, y_t = 2s$ なので

$$\begin{aligned}
z_s &= z_x x_s + z_y y_s = \cos x \cos y \cdot 2s - \sin x \sin y \cdot 2t \\
&= 2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y \\
z_t &= z_x x_t + z_y y_t = \cos x \cos y \cdot (-2t) - \sin x \sin y \cdot 2s \\
&- 2t \cos x \cos y - 2s \sin x \sin y
\end{aligned}$$

となる。これを更に s および t で微分すると

$$\begin{aligned}
z_{ss} &= (z_s)_s = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_s \\
&= (2s \cos x \cos y)_s - (2t \sin x \sin y)_s \\
&= (2s)_s \cos x \cos y + 2s\,(\cos x \cos y)_s - 2t\,(\sin x \sin y)_s \\
&= 2 \cos x \cos y + 2s\,(\cos x)_s \cos y + 2s \cos x\,(\cos y)_s - 2t\,(\sin x)_s \sin y - 2t \sin x\,(\sin y)_s \\
&= 2 \cos x \cos y - 2s \sin x \cdot 2s \cos y - 2s \cos x \sin y \cdot (2t) - 2t \cos x \cdot 2s \sin y - 2t \sin x \cos y \cdot (2t) \\
&= 2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y - 8st \cos x \sin y \\
z_{st} &= (z_s)_t = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_t \\
&= (2s \cos x \cos y)_t - (2t \sin x \sin y)_t \\
&= 2s\,(\cos x \cos y)_t - (2t)_t \sin x \sin y - 2t\,(\sin x \sin y)_t \\
&= 2s\,(\cos x)_t \cos y + 2s \cos x\,(\cos y)_t - 2 \sin x \sin y - 2t\,(\sin x)_t \sin y - 2t \sin x\,(\sin y)_t \\
&= -2 \sin x \sin y + 4(t^2 - s^2) \cos x \sin y
\end{aligned}$$

以下同様に計算して

$$\begin{aligned}
z_{ts} &= -2 \sin x \sin y + 4(t^2 - s^2) \cos x \sin y \\
z_{tt} &= -2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y + 8st \cos x \sin y
\end{aligned}$$

を得る。

以下は結果のみを記す。

(2)

$$\begin{aligned}
z_s &= 2\left(s + t + st^2\right) \cos(x^2 + y^2) \\
z_t &= 2\left(s + t + s^2 t\right) \cos(x^2 + y^2) \\
z_{ss} &= 2\left(1 + t^2\right) \cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + st^2\right)^2 \sin(x^2 + y^2) \\
z_{st} &= 2\,(1 + 2st) \cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + st^2\right)\left(s + t + s^2 t\right) \sin(x^2 + y^2) \\
z_{ts} &= 2\,(1 + 2st) \cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + st^2\right)\left(s + t + s^2 t\right) \sin(x^2 + y^2) \\
z_{tt} &= 2\left(1 + s^2\right) \cos(x^2 + y^2) - 4\left(s + t + s^2 t\right)^2 \sin(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

(3)

$$z_s = \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right) \cos(x + 2y)$$

$$z_t = \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)\cos(x+2y)$$

$$z_{ss} = \frac{2t}{s^3}\cos(x+2y) - \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)^2 \sin(x+2y)$$

$$z_{st} = -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2}\right)\cos(x+2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)\left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)\sin(x+2y)$$

$$z_{ts} == -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2}\right)\cos(x+2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)\left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2}\right)\sin(x+2y)$$

$$z_{tt} = \frac{4s}{t^3}\cos(x+2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2}\right)^2 \sin(x+2y)$$

演習問題 2.7　次の場合に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 及び $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$　　(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u\cos v, y = u\sin v$　　(4) $x = u, y = u + v$

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を直接求めることは難しいので，最初に $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ を求めて，逆行列を求めることにより，$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ を求める。

ヤコビ行列は変数の順序が変わると別のヤコビ行列になる。順序を間違えないこと。$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ でいうと，独立変数が左から右へ u, v，従属変数は縦で上から下に x, y となる。

逆行列の求め方があやふやな人は必ず**検算**をすること。A が与えられた行列で B が求めた逆行列とするとき，正しければ AB は単位行列になる。

(1)　$\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0, \dfrac{\partial x}{\partial v} = 2v, \dfrac{\partial y}{\partial u} = 2u, \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2u} \\ \dfrac{1}{2v} & 0 \end{pmatrix}$$

(2)　$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \dfrac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$

(3)　$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}, \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\dfrac{\sin v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列の求め方が分からない人 (またはすぐ忘れる人) へ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられた。これを忘れたときは次の様に定義に基づいて逆行列を計算して求めてもよい。

$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より p,q,r,s に関する連立 1 次方程式 (p,q,r,s が未知数で，a,b,c,d は既知数)

$$ap+br=1, aq+bs=0, cp+dr=0, cq+ds=1$$

を得る。これを解くと $p = \dfrac{d}{ad-bc}, q = \dfrac{-b}{ad-bc}, r = \dfrac{-c}{ad-bc}, d = \dfrac{a}{ad-bc}$ が分かる。

演習問題 2.8 　次の関数に対し $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x+y^2$,$s = x+y, t = xy$
(2) $z = x+y$,$s = x^2+y^2, t = x^2y^2$
(3) $z = x+y, s = x^2+y^2, t = xy$
(4) $z = x+y, s = x^2-y^2, t = 2xy$
(5) $z = xy, s = x, t = x+y$
(6) $z = xy, s = x\cos y, t = x\sin y$

スペース節約のため 2 次導関数は行列の形で表現しているが，行列で表現しなければいけないというわけでは勿論ない。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x-y} & -\dfrac{1}{x-y} \\ -\dfrac{y}{x-y} & \dfrac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = (1 \ \ 2\,y)$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-2\,y^2}{x-y} & \dfrac{-1+2\,y}{x-y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{y\,(-1+2\,y)}{(x-y)^2} & -\dfrac{4\,x\,y-2\,y^2-x}{(x-y)^2} \\ -\dfrac{-1+2\,y}{(x-y)^2} & \dfrac{2\,x-1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\,y\,(-x+3\,x\,y-y^2)}{(x-y)^3} & -\dfrac{-x+4\,x\,y-y}{(x-y)^3} \\ -\dfrac{-x+4\,x\,y-y}{(x-y)^3} & \dfrac{2\,(-1+y+x)}{(x-y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 2\,x\,y^2 & 2\,x^2\,y \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2-y^2)} & -\dfrac{1}{2\,x\,(x^2-y^2)} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2-y^2)} & \dfrac{1}{2\,y\,(x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\,(x+y)} & \dfrac{1}{2\,(x+y)\,x\,y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} & -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} \\ -\dfrac{2\,x+y}{2\,(x+y)^2\,x^2\,y} & -\dfrac{2\,y+x}{2\,(x+y)^2\,x\,y^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3} & -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3\,x\,y} \\ -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3\,x\,y} & -\dfrac{x^2+3\,x\,y+y^2}{4\,(x+y)^3\,y^3\,x^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(3) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ y & x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2-y^2)} & -\dfrac{y}{x^2-y^2} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2-y^2)} & \dfrac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)} \dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\,(x+y)} & \dfrac{1}{x+y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} & -\dfrac{1}{2\,(x+y)^2} \\ -\dfrac{1}{(x+y)^2} & -\dfrac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4\,(x+y)^3} & -\dfrac{1}{2\,(x+y)^3} \\ -\dfrac{1}{2\,(x+y)^3} & -\dfrac{1}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(4) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 2\,x & -2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)} \\ -\dfrac{y}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{x}{2\,(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}=\frac{D(z)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{2\,(x^2+y^2)} & \dfrac{x+y}{2\,(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} -\dfrac{x^2-y^2-2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{x^2-y^2+2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} \\ -\dfrac{x^2-y^2+2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^2-y^2-2\,x\,y}{2\,(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)}=\dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{-3\,x^2\,y+y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} & -\dfrac{3\,x^2\,y-y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} \\ -\dfrac{3\,x^2\,y-y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} & \dfrac{-3\,x^2\,y+y^3-3\,x\,y^2+x^3}{4\,(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(5) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} y-x & x \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(6) $\dfrac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$ である。$\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\dfrac{\sin y}{x} & \dfrac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\dfrac{D(z)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり，$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} y\cos y - \sin y & y\sin y + \cos y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & -y\sin y \\ 0 & y\cos y \end{pmatrix}$$

が成立している。$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(s,t)} = \dfrac{D(z_s,z_t)}{D(x,y)}\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y\sin^2 y}{x} & -\dfrac{y\sin y\cos y}{x} \\ -\dfrac{y\sin y\cos y}{x} & \dfrac{y\cos^2 y}{x} \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 2.9　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする (2 次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ および
ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を計算し，関数 $z = f(x,y)$ に対し次を示せ。

(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

ヤコビ行列は $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$ である。$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ なので

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\cos\theta\times r\cos\theta-(-r\sin\theta)\times\sin\theta=r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r$$

である。

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$ なので

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta \tag{1}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2\\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta\\ &\quad+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta\\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\end{aligned}$$

となる。

(2) 式 (1) より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

となるが,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

を得る。計算の途中で $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を使った。

同様に式 (1) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)r\sin\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r\cos\theta\\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial\theta}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}r\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\cos\theta\end{aligned}$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\end{aligned}$$

を得る。

演習問題 2.10

(1) $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

(1) $z_x^2+z_y^2=z_u^2+z_v^2$

(2) $z_{xx}+z_{yy}=z_{uu}+z_{vv}$

(2) $x+y=e^{u+v}$, $x-y=e^{u-v}$ に対し $z_{xx}-z_{yy}=e^{-2u}(z_{uu}-z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x+y=u$, $y=uv$ ならば $xz_{xx}+yz_{xy}+z_x=uz_{uu}-vz_{uv}+z_u$ となる事を示せ。

(1) x を u で微分すると $x_u=\cos\alpha$，v で微分すると $x_v=-\sin\alpha$ を得る。同様に $y_u=\sin\alpha$, $y_v=\cos\alpha$ となる。合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}z_u &= z_x x_u+z_y y_u\\ z_v &= z_x x_v+z_y y_v\end{aligned}$$

が得られる。これを用いて $z_u^2+z_v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned}z_u^2+z_v^2 &= (z_x\cos\alpha-z_y\sin\alpha)^2+(z_x\sin\alpha+z_y\cos\alpha)^2\\ &= z_x^2\cos^2\alpha-2z_xz_y\cos\alpha\sin\alpha+z_y^2\sin^2\alpha+z_x^2+2z_xz_y\sin\alpha\cos\alpha+z_y^2\cos^2\alpha\\ &= z_x^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+z_y^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\\ &= z_x^2+z_y^2\end{aligned}$$

となる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると，積の微分法より

$$(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x(x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y(y_u)_u$$

となる。x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると，$(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると

$$z_{uu} = z_{xx}x_u^2 + 2z_{xy}x_u y_u + z_{yy}y_u^2 = z_{xx}\cos^2\alpha + 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha$$

が得られる。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると

$$z_{vv} = z_{xx}\sin^2\alpha - 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha$$

となり, これらを加えると

$$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + z_{yy}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = z_{xx} + z_{yy}$$

となる。

(2) $x = \dfrac{e^{u+v} + e^{u-v}}{2}, y = \dfrac{e^{u+v} - e^{u-v}}{2}$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x x + z_y y$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned} z_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u}(z_x x) + \frac{\partial}{\partial u}(z_y y) \\ &= (z_x)_u x + z_x x_u + (z_y)_u y + z_y y_u \\ &= (z_{xx}x_u + z_{xy}y_u)\,x + z_x x + (z_{yx}x_u + z_{yy}y_u)\,y + z_y y \\ &= z_{xx}x^2 + 2z_{xt}xy + z_{yy}y^2 + z_x x + z_y y \end{aligned}$$

となる。

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x y + z_y x$$

を v で微分すると

$$\begin{aligned} z_{vv} &= (z_x)_v y + z_x y_v + (z_y)_v x + z_y x_v \\ &= (z_{xx}x_v + z_{xy}y_v)\,y + z_x x + (z_{yx}x_v + z_{yy}y_v)\,x + z_y y \\ &= z_{xx}y^2 + 2z_{xy}xy + z_{yy}x^2 + z_x x + z_y y \end{aligned}$$

となる。よって $z_{uu} - z_{vv} = (z_{xx} - z_{yy})(x^2 - y^2)$ となるが，$x^2 - y^2 = e^{2u}$ なので式が証明された。

(3) $x = u - y = u - uv$ なので

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

である。

$$z_u = z_x x_u + z_u u_y = z_x(1-v) + z_y v$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned}
z_{uu} &= (z_u)_u(1-v) + (z_y)_u v \\
&= (z_{xx}x_u + z_{xy}y_u)(1-v) + (z_{yx}x_u + z_{yy}y_u)v \\
&= z_{xx}(1-v)^2 + 2z_{xy}u(1-v) + z_{yy}v^2
\end{aligned}$$

であり，z_u を v で微分すると

$$\begin{aligned}
z_{uv} &= (z_x)_v(1-v) + z_x(1-v)_v + (z_y)_v v + z_y v_v \\
&= (z_{xx}x_v + z_{xy}y_v)(1-v) - z_x + (z_{yx}x_v + z_{yy}y_v)v + z_y \\
&= -z_{xx}u(1-v) + z_{xy}u(1-v) - z_{xy}uv + z_{yy}uv - z_x + z_y
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
uz_{uu} - vz_{uv} + z_u &= z_{xx}u(1-v)^2 + 2z_{xy}uv(1-v) + z_{yy}uv^2 + z_{xx}uv(1-v) - z_{xy}uv(1-v) \\
&\quad + z_{xy}uv^2 - z_{yy}uv^2 + z_x v - z_y v + z_x(1-v) + z_y v \\
&= z_{xx}u(1-v) + z_{xy}uv + z_x \\
&= xz_{xx} + yz_{yy} + z_x
\end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 2.11　次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x,y,z) = x^2y^3z^4$　(2) $w = xyz\sin(x^2+y^2+z^2)$

(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$　(4) $x^2y^3\log(x^2+y^3+z^4)$

(1) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3z^4$, $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2z^4$, $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 4x^2y^3z^3$

(2) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = yz\sin(x^2+y^2+z^2) + 2x^2yz\cos(x^2+y^2+z^2)$,
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = xz\sin(x^2+y^2+z^2) + 2xy^2z\cos(x^2+y^2+z^2)$,
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = xy\sin(x^2+y^2+z^2) + 2xyz^2\cos(x^2+y^2+z^2)$

(3) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3+z^4}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3+z^4}$, $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 4z^3e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3\log(x^2+y^3+z^4) + \dfrac{2x^3y^3}{x^2+y^3+z^4}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2\log(x^2+y^3+z^4) + \dfrac{3x^2y^5}{x^2+y^3+z^4}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{4x^2y^3z^3}{x^2+y^3+z^4}$

演習問題 2.12　次の場合に $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ 及び $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ を求めよ。

(1) $x=v^2, y=w^2, z=u^2$

(2) $x=u^2-v^2+w^2, y=2uv, z=2uw$

(3) $x=u\cos v, y=u\sin v, z=u+w$

(4) $x=u, y=u+v, z=u+v+w$

(1)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) のみ逆行列を求める計算を記す。ここでは線型代数の知識はないとして直接計算で求めている。線型代数において学んだ逆行列の求め方を知っているものは勿論それを用いて計算してよい。

逆行列を $B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\,v & 0 \\ 0 & 0 & 2\,w \\ 2\,u & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので,a,b,c,d,e,f,g,h,i は連立 1 次方程式

$$2vd=1, 2ve=0, 2vf=0, 2wg=0, 2wh=1, 2wi=0, 2ua=0, 2ub=0, 2uc=1$$

の解なので，連立 1 次方程式を解くと

$$a=0, b=0, c=\frac{1}{2u}, d=\frac{1}{2v}, e=0, f=0, g=0, h=\frac{1}{2w}, i=0$$

が得られる (ここで $u\neq 0, v\neq 0, w\neq 0$ として計算した)。よって

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2\,u} \\ \frac{1}{2\,v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\,w} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u & -2v & 2w \\ 2v & 2u & 0 \\ 2w & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{2(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{v}{2\,(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{w}{2(u^2+v^2-w^2)} \\ -\dfrac{v}{2\,(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{u^2-w^2}{2u(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{vw}{2u(u^2+v^2-w^2)} \\ -\dfrac{w}{2(u^2+v^2-w^2)} & -\dfrac{vw}{2u(u^2+v^2-w^2)} & \dfrac{u^2+v^2}{2u(u^2+v^2-w^2)} \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u\,\sin v & 0 \\ \sin v & u\,\cos v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\dfrac{\sin v}{u} & \dfrac{\cos v}{u} & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(4)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.13　次の関数に対し $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $w = x^3+y^3+z^3$,$x+y+z=s, xy+yz+zx=t, xyz=u$

(2) $w = x+y+z$,$x^2+y^2+z^2=s, xyz=t, xy+yz+zx=u$

(1)

$$\frac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} & \dfrac{\partial s}{\partial z} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} & \dfrac{\partial t}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

なので

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\
\dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\
\dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial u}
\end{pmatrix}
= \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} = \left(\frac{D(s,t,u)}{D(x,y,z)}\right)^{-1}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} & -\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} & \dfrac{1}{(x-y)(x-z)} \\
\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} & -\dfrac{y}{(y-z)(y-x)} & \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} \\
\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)} & -\dfrac{z}{(z-x)(z-y)} & \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}
\end{pmatrix}
$$

となる。

$$
\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3zx + 3yz \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= -3x - 3y - 3z \\
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

となる。$X = \dfrac{\partial w}{\partial s}$ とおき，これに合成関数の微分法を適用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial X}{\partial s} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= 6x + 6y + 6z
\end{aligned}
$$

が得られる。同様に計算して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= -3 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial w_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{\partial w_u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 0\end{aligned}$$

(2)　この問題は x, y, z に関する対称式 (x, y, z を入れ換えても式が変わらない) に関係しているので，変数間に特殊な関係が存在する。ここではそのことを使って解く方法を紹介する。勿論 (1) と同様に方法で解いてもよい。

$$\begin{aligned} w^2 &= (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ &= s + 2u \end{aligned}$$

が成立している。両辺を s で微分すると，

$$\frac{\partial w^2}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s} + 2\frac{\partial u}{\partial s}$$

となる。s で微分するとき t, u は固定されているので

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial s} = 1$$

である。$\dfrac{\partial w^2}{\partial s} = 2w\dfrac{\partial w}{\partial s}$ なので $2w\dfrac{\partial w}{\partial s} = 1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2(x+y+z)}$$

となる。$w^2 = s + 2u$ を t で微分すると

$$\frac{\partial w^2}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

となる。$\dfrac{\partial s}{\partial t} = 0$，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ より

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

となる。$w^2 = s + 2u$ を u で微分すると，

$$\frac{\partial w^2}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial u} + 2\frac{\partial u}{\partial u}$$

となる。$\dfrac{\partial s}{\partial u}=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial u}=1$ である。$\dfrac{\partial w^2}{\partial u}=2w\dfrac{\partial w}{\partial u}$ なので

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{w}=\frac{1}{x+y+z}$$

となる。

$2ww_s=1$ の両辺を s で微分すると $2w_sw_s+2ww_{ss}=0$ を得るので

$$\begin{aligned} w_{ss}&=-\frac{w_s^2}{w}=-\frac{1}{w}\left(\frac{1}{2w}\right)^2\\ &=-\frac{1}{4(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

$w_t=0$ なので $w_{tt}=0$，$w_{ts}=0$ である。また $ww_u=1$ の両辺を u で微分すると $w_uw_u+ww_{uu}=0$ を得るので，

$$\begin{aligned} w_{uu}&=-\frac{w_u^2}{w}=-\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}\right)^2\\ &=-\frac{1}{(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

となる。

(1) の問題もここで紹介した方法を用いて計算できる。興味のあるものは試みよ。

演習問題 2.14 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ とする (3 次元の極座標表示)。関数 $w=f(x,y,z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}$

3 次行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ に対しその行列式は

$$\det A=aei+dhc+gbf-gec-dbi-ahf$$

であるということは知っているとする。

(1)

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \quad = \quad \det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right) = r^2\sin\theta$$

となる。

(2)

$$\frac{D(w)}{D(r,\theta,\varphi)} = \frac{D(w)}{D(x,y,z)}\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}r\sin\theta \\
\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}r\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\theta \\
\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial w}{\partial z}\sin\theta \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi
\end{aligned}$$

となるので，各式を 2 乗して加えると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

が成立する。

(3) $w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r$ を r で微分して

$$\begin{aligned}
w_{rr} &= (w_x)_r x_r + w_x x_{rr} + (w_y)_r y_r + w_y y_{rr} + (w_z)_r z_r + w_z z_{rr} \\
&= (w_{xx}x_r + w_{xy}y_r + w_{xz}z_r)x_r + w_x x_{rr} + (w_{yx}x_r + w_{yy}y_r + w_{yz}z_r)y_r \\
&\quad + w_y y_{rr} + (w_{zx}x_r + w_{zy}y_r + w_{zz}z_r)z_r + w_z z_{rr} \\
&= w_{xx}x_r^2 + w_{yy}y_r^2 + w_{zz}z_r^2 + 2w_{xy}x_r y_r + 2w_{yz}y_r z_r + 2w_{xz}x_r z_r + w_x x_{rr} + w_y y_{rr} + w_z z_{rr}
\end{aligned}$$

を得る。同様に $w_{\varphi\varphi}$,$(\sin\theta w_\theta)_\theta$ を計算し，$w_{rr} + \dfrac{2}{r}w_r + \dfrac{1}{r^2\sin\theta} + (\sin\theta w_\theta)_\theta + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}w_{\varphi\varphi}$ の計算を実行すると求める式が得られる。