

**演習問題 2.28**  $(a, b)$  で  $f$  が (広義の) 極小値をとるならば,  $(a, b)$  は  $f$  の臨界点であることを示せ。

$(a, b)$  で  $f$  が広義の極小値をとるので十分小さい ( $0$  に近い)  $h$  と  $k$  に対して,  $f(a, b) \leq f(a + h, b + k)$  が成立している。 $h > 0$  のとき  $\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$  より

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$$

が成立する。また  $h < 0$  のとき  $\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$  より

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$$

が成立する。よって  $f_x(a, b) = 0$  である。

$k > 0$  のとき  $\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \geq 0$  より

$$f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \geq 0$$

が成立する。また  $k < 0$  のとき  $\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \leq 0$  より

$$f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow -0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \leq 0$$

が成立する。よって  $f_y(a, b) = 0$  である。よって  $(a, b)$  は  $f$  の臨界点である。

**演習問題 2.29** 例 2.26 において  $H' > 0$  かつ  $A < 0$  のとき  $f(x, y)$  は  $(0, 0)$  で極大値をとることを示せ。

$y = 0$  のとき  $f(x, 0) = Ax^2$  となるので,  $x \neq 0$  のとき  $f(x, 0) = Ax^2 < 0 = f(0, 0)$  となっている。 $y \neq 0$  のとき  $\frac{1}{y^2} f(x, y) = A \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2B \left(\frac{x}{y}\right) + C$  である。 $g(t) = At^2 + 2Bt + C$  とおくと,  $H' > 0$  かつ  $A < 0$  なので, 任意の  $t$  に対し  $g(t) < 0$  である ( $H$  は  $g(t)$  の判別式の符号を逆にしたもの)。よって  $\frac{1}{y^2} f(x, y) < 0$  となり,  $f(x, y) < 0$  が得られる。以上により  $(x, y) \neq (0, 0)$  のとき  $f(x, y) < f(0, 0)$  なので  $(0, 0)$  で極大値をとる。

**演習問題 2.30** 次の関数の極大・極小を求めよ。

$$(1) z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$$

$$(2) z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$$

$$(3) z = \frac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$(4) z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2) \quad (a > b > 0)@$$

$$(5) z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$$

$$(6) z = x^3 - 3xy + y^3$$

$$(7) z = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

$$(8) z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

(1) (a) 最初に臨界点 ( $z_x = 0$  かつ  $z_y = 0$  となる点) を求める。  $z_x = 2x - y - 2, z_y = -x + 2y + 3$  なので連立方程式  $z_x = 0, z_y = 0$  を解くと  $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$  が得られる。(b) 次にヘッシアンを計算する。  $z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$  なので  $H(x, y) = 2^2 - (-1)^2 = 3 > 0, z_{xx} > 0$  である。よって  $z$  は  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  で極小値  $-\frac{4}{3}$  をとる。

(2) 同様に計算すると  $\left(-\frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right)$  が臨界点であるが、  $H(x, y) = -17 < 0$  である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3)  $z_x = \frac{a}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, z_y = \frac{b}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)y}{x^2 + y^2 + 1}$  なので臨界点は連立方程式  $z_x = 0, z_y = 0$  の解である。  $z_x = 0$  より  $x = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}a$  となる。また  $z_y = 0$  より  $y = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}b$  となる。  $k = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}$  とおくと  $x = ka, y = kb$  となる。これを  $z_x(x^2 + y^2 + 1) = a(x^2 + y^2 + 1) - 2(ax + by)x = 0$  に代入して

$$a((a^2 + b^2)k^2 + 1) - 2(a^2 + b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと  $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  となるので、臨界点は

$$(x, y) = \left( \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

である。

$$H(x, y) = \left| \begin{array}{cc} \frac{2(ax^3 - 3y^2ax - 3ax + 3byx^2 - by^3 - by)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ \frac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & -\frac{2(3byx^2 - by^3 + 3by - 3y^2ax + ax^3 + ax)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{array} \right|$$

となるが、

$$H\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{array} \right| = \frac{a^2 + b^2}{4} > 0$$

なので  $z_{xx}\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} > 0$  より  $(x, y) = \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$  は極大値を与える。極値は

$$z\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1}$$

である。

(4)  $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax$ ,  $z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by$  となっている。連立方程式  $z_x = 0, z_y = 0$  を解く。  $e^{-(x^2+y^2)} \neq 0$  なので

$$z_x = 0 \iff x = 0 \vee a - (ax^2 + by^2) = 0, \quad z_y = 0 \iff y = 0 \vee b - (ax^2 + by^2) = 0$$

となっている。場合分けを実行する。(a)  $x = 0$ , (b)  $a - (ax^2 + by^2) = 0$ , (c)  $y = 0$ , (d)  $b - (ax^2 + by^2) = 0$ , とすると,

$$\left( (a) \vee (b) \right) \wedge \left( (c) \vee (d) \right) = \left( (a) \wedge (c) \right) \vee \left( (a) \wedge (d) \right) \vee \left( (b) \wedge (c) \right) \vee \left( (b) \wedge (d) \right)$$

となる。

(1) (a)  $\wedge$  (c) のとき: この場合は  $x = 0$  かつ  $y = 0$  なので解は  $(x, y) = (0, 0)$  である。

(2) (a)  $\wedge$  (d) のとき:  $x = 0$  を  $b - (ax^2 + by^2) = 0$  に代入すると,  $b(1 - y^2) = 0$  となる。  $b \neq 0$  より  $1 - y^2 = 0$ , よって  $y = \pm 1$  となる。この場合解は  $(x, y) = (0, \pm 1)$  である。

(3) (b)  $\wedge$  (c) のとき:  $y = 0$  を  $a - (ax^2 + by^2) = 0$  に代入すると,  $a(1 - x^2) = 0$  となる。  $a \neq 0$  より  $1 - x^2 = 0$ , よって  $x = \pm 1$  となる。この場合解は  $(x, y) = (\pm 1, 0)$  である。

(4) (a)  $\wedge$  (d) のとき:  $a = ax^2 + by^2 = b$  となるので  $a = b$  となり,  $a > b$  に矛盾する。よってこの場合解はない。

以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2 - by^2 + 2x^4a + 2x^2by^2 + a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2 - 5by^2 + 2y^2ax^2 + 2y^4b + b) \end{vmatrix}$$

なので

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0$$

$$H(0, 1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$H(0, -1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$H(1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0$$

$$H(-1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0$$

となる。よって  $z$  は  $(x, y) = (0, 0)$  で極小値  $z(0, 0) = 0$ ,  $(x, y) = (\pm 1, 0)$  で極大値  $z(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$  をとる。

(5) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, \quad z_y = 4xy - 6y$$

なので  $z_y = 0$  より  $y(2x - 3) = 0$  となるので,  $y = 0$  または  $2x - 3 = 0$  となる。 $y = 0$  のとき

$$z_x(x, 0) = 3x^2 + 2 \cdot 0^2 - 6x = 3x^2 - 6x = 0$$

を得る。よって  $y = 0$  のときは  $x = 0$  または  $x = 2$  である。

$x = \frac{3}{2}$  のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって  $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$  である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (2, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なので

$$H(x, y) = 12(x - 1)(2x - 3) - 16y^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 36 > 0, H(2, 0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える  $(x, y)$  は  $(0, 0)$  と  $(2, 0)$  である。 $z_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ ,  $z_{xx}(2, 0) = 6 > 0$  なので  $(0, 0)$  では極大,  $(2, 0)$  では極小である。

(6) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

なので  $z_x = 0$  から  $z_y = 0$  を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 - y + x = (x^2 - y^2) + (x - y) \\ &= (x - y)(x + y) + (x - y) \\ &= (x - y)(x + y + 1) \end{aligned}$$

を得る。よって  $x = y$  または  $x + y = -1$  が成立する。

最初に  $x+y = -1$  が成立している場合を考える。 $y = -1-x$  を  $x = y^2$  に代入すると、 $x = (1+x)^2$  より  $x^2 + x + 1 = 0$  を得る。この 2 次方程式は実数解を持たないので、この場合は解はない。よって  $x = y$  が成立する。これをもとの方程式に代入すると  $x = 0, 1$  が得られる。よって臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1)$$

である。

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3, \quad z_{yy} = 6y$$

なので

$$H(x, y) = 36xy - 9$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -9 < 0, \quad H(1, 1) = 27 > 0$$

となる。よって極値を与える  $(x, y)$  は  $(x, y) = (1, 1)$  である。 $z_{xx}(1, 1) = 6 > 0$  なので  $(1, 1)$  で極小である。

(7) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = y(x^2 + y^2 - 1) + 2x^2y, \quad z_y = x(x^2 + y^2 - 1) + 2xy^2$$

なので  $z_x = 0$  から  $z_y = 0$  を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= (y-x)(x^2 + y^2 - 1) + 2xy(x-y) = (y-x)(x^2 + y^2 - 1) - 2xy(y-x) \\ &= (y-x)(x^2 + y^2 - 1 - 2xy) = (y-x)((x-y)^2 - 1) \\ &= (y-x)(x-y-1)(x-y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって  $x = y$  または  $x - y - 1 = 0$  または  $x - y + 1 = 0$  が成立する。

最初に  $x = y$  が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned} 0 &= z_x(x, x) = x(x^2 + x^2 - 1) + 2x^3 = x(4x^2 - 1) \\ &= x(2x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

より  $x = 0$  または  $x = \pm \frac{1}{2}$  となる。よってこの場合

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に  $x - y - 1 = 0$  の場合を考える。 $y = x - 1$  なので

$$\begin{aligned} 0 &= z_y(x, x-1) = x(x^2 + (x-1)^2 - 1) + 2x(x-1)^2 = x(x^2 + (x-1)^2 - 1 + 2(x-1)^2) \\ &= x(4x^2 - 6x + 2) = 2x(2x^2 - 3x + 1) \\ &= 2x(2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

より  $x = 0$  または  $x = \frac{1}{2}$  または  $x = 1$  となる。今の場合  $y = x - 1$  なので

$$(x, y) = (0, -1), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 0)$$

である。

最後に次に  $x - y + 1 = 0$  の場合を考える。  $y = x + 1$  なので

$$\begin{aligned} 0 = z_y(x, x+1) &= x(x^2 + (x+1)^2 - 1) + 2x(x+1)^2 = x(x^2 + (x+1)^2 - 1 + 2(x+1)^2) \\ &= x(4x^2 + 6x + 2) = 2x(2x^2 + 3x + 1) \\ &= 2x(2x+1)(x+1) \end{aligned}$$

より  $x = 0$  または  $x = -\frac{1}{2}$  または  $x = -1$  となる。今の場合  $y = x + 1$  なので

$$(x, y) = (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (-1, 1)$$

である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6xy, \quad z_{xy} = 3x^2 + 3y^2 - 1, \quad z_{yy} = 6xy$$

なので

$$H(x, y) = 36x^2y^2 - (3x^2 + 3y^2 - 1)^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -1 < 0, H(0, \pm 1) = -4 < 0, H(\pm 1, 0) = -4 < 0, H\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = 2 > 0, H\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

となる。よって極値を与える  $(x, y)$  は  $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$  である。

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = z_{xx}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) > 0, \quad z_{xx}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = z_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < 0$$

なので  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  で極小であり,  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  で極大である。

(8) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

なので  $z_x = 0$  と  $z_y = 0$  を加えて 4 で割ると

$$0 = x^3 + y^3 = (x + y) + (x^2 - xy + y^2)$$

を得る。よって  $x + y = 0$  または  $x^2 - xy + y^2 = 0$  が成立する。

最初に  $x^2 - xy + y^2 = 0$  が成立している場合を考える。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

より  $x = 0, y = 0$  を得る。これは  $z_x(0, 0) = 0, z_y(0, 0) = 0$  を満たしている。

次に  $x + y = 0$  の場合を考える。 $y = -x$  を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= z_x(x, -x) = 4x^3 - 4x - 4x = 4(x^3 - 2x) \\ &= 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

より  $x = 0$  または  $x = \sqrt{2}$  または  $x = -\sqrt{2}$  となる。今の場合

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

なので

$$H(x, y) = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 16$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 0, \quad H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$$

となる。 $z_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$  なので  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  で極小である。

$(x, y) = (0, 0)$  はこれだけではよく分からない。最初に  $y = x$  上での  $z$  の動きを見よう。 $g(x) = z(x, x)$  とおくと

$$g(x) = 2x^4$$

となるので  $x = 0$  で極小である。よって  $(0, 0)$  の十分近くの点  $(x, y)$  で (今の場合  $y = x$  を満たしている),  $z(x, y) > z(0, 0)$  となる点がある。

次に  $y = -x$  上での  $z$  の動きを見よう。 $h(x) = z(x, -x)$  とおくと

$$h(x) = 2x^4 - 8x^2$$

となる。 $h(x)$  の増減表を書いて  $x = 0$  のまわりの状況を調べると,  $y = -x$  上では極大になっている。よって  $(0, 0)$  の十分近くの点  $(x, y)$  で (今の場合  $y = -x$  を満たしている),  $z(x, y) < z(0, 0)$  となる点がある。十分近くに  $z(0, 0)$  より大きい点も小さい点もあるので,  $z$  は  $(0, 0)$  で極値をとらない。

以上により  $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  および  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  で極小値をとる。

演習問題 2.31

- (1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。  
 (2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

講義ではこの部分は省略したが、解説はしておこう。

(1) このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを  $a, b, c$  とする。 $s = \frac{a+b+c}{2}$  とおくと、3 角形の面積  $S$  は  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  となる。

3 角形の各辺の長さを  $x, y, z$  とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを  $2s$  とおくと、即ち  $x+y+z = 2s$  ( $s > 0$ ) が成立している。 $x, y, z$  は辺の長さであるから  $x > 0, y > 0, z > 0$  を満たしている。 $x, y, z$  が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式、即ち  $x+y > z, y+z > x, z+x > y$  が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき、3 辺の長さが  $x, y, z$  であるような 3 角形が存在する。 $z$  を消去して  $x, y$  の不等式から  $x < s, y < s, x+y > s$  が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす  $x, y$  は最初の 6 つの不等式を満たす。

$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq s, y \leq s, x+y \geq s\}$  とおく。ここで  $S$  が最大するとき  $S^2$  が最大であり、逆も成立する。よって  $S^2$  が最大になる場合を求めるればよい。

$$f(x, y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

とおき、 $\bar{D}$  上で  $f(x, y)$  の最大値を求める。 $\bar{D}$  は有界閉集合であり、 $f(x, y)$  は  $\bar{D}$  上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は  $f(x, y) = 0$  となる。よって内部で最大値をとる。この点は臨界点なので臨界点を求める。

$$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$$

$$f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$$

を解いて  $(x, y) = (0, s), (s, 0), (s, s), \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$  が得られる。この中に最大値を与える点が存在する。 $f(0, s) = 0, f(s, 0) = 0, f(s, s) = 0, f\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) = \frac{s^4}{27}$  なので最大値を与える点は  $(x, y) = \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$  である。このとき  $x = y = z = \frac{2s}{3}$  なので 3 角形は正 3 角形である。以上により正 3 角形するとき面積最大になる。

(2) 定円を点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円とする。円に内接する 3 角形を  $ABC$  とする。角  $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$  とおくと  $s+t+u = 2\pi$  が成立している。最大面積を求めるので、 $ABC$  は  $O$  を含んでいるとしてよい。このとき  $ABC$  が 3 角形をなす条件は  $0 < s < \pi, 0 < t < \pi, 0 < u < \pi$  である。この不等式が定義する領域を  $D$  とすると  $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s < \pi, t < \pi, s+t > \pi\}$  となる。

3 角形  $ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2}r^2(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$

なので、 $\bar{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq \pi, t \leq \pi, s+t \geq \pi\}$  上で

$$z = f(s, t) = \frac{1}{2}r^2(\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$



の最大値を求める問題になる。

$\bar{D}$  は有界閉集合であり,  $f(x, y)$  は  $\bar{D}$  上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。  $L_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = \pi, 0 \leq t \leq \pi\}$ ,  
 $L_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq \pi, t = \pi\}$ ,  $L_3 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq \pi, s + t = \pi\}$  とおくと  $\partial\bar{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  である。  $L_1$  上で  $z$  は

$$\begin{aligned} z &= f(\pi, t) = \frac{1}{2}r^2 (\sin \pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin t + \sin(\pi - t)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin t + \sin t) = r^2 \sin t \end{aligned}$$

となるので,  $L_1$  上で最大になるのは  $(s, t) = (\pi, \frac{\pi}{2})$  のときで値は  $f(\pi, \frac{\pi}{2}) = r^2$  である。  $L_2$  上では

$$z = f(s, \pi) = r^2 \sin s$$

となるので,  $L_2$  上で最大になるのは  $(s, t) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$  のときで値は  $f(\frac{\pi}{2}, \pi) = r^2$  である。  $L_3$  上では  $t = \pi - s$  なので

$$\begin{aligned} z &= f(s, \pi - s) = \frac{1}{2}r^2 (\sin \pi + \sin(\pi - s) + \sin(2\pi - \pi)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin(\pi - s)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin s) = r^2 \sin s \end{aligned}$$

となる。  $L_3$  上で最大になるのは  $(s, t) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  のときで値は  $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = r^2$  である。 以上に  
より境界上での最大値は  $r^2$  で  $(s, t) = (\pi, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$z_s = \frac{1}{2}r^2 (\cos s - \cos(2\pi - s - t)), \quad z_t = \frac{1}{2}r^2 (\cos t - \cos(2\pi - s - t))$$

なので臨界点では  $\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$  かつ  $\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$  が成立している。  
これより  $\cos s = \cos t$  が得られる。  $0 \leq s \leq \pi$  かつ  $0 \leq t \leq \pi$  であるが, この範囲で  $\cos x$  は  
単射なので  $s = t$  が成立する。  $t = s$  を代入して  $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$  を得る。  $0 \leq s \leq \pi$  より,  
 $0 \leq 2s \leq 2\pi$ ,  $-2\pi \leq -2s \leq 0$ ,  $0 \leq 2\pi - 2s \leq 2\pi$  と変形できる。 この範囲で  $\cos x$  は単射なので  
 $s = 2\pi - 2s$  が成立する。 よって臨界点は  $(s, t) = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  である。

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

なので  $f$  は  $(s, t) = (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  で最大値をとる。  $s = t = u = \frac{2\pi}{3}$  なので最大になる 3 角形は正  
3 角形である。

演習問題 2.32 次で与えられる陰関数に関し  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  を求めよ。

(1)  $1 - y + xe^y = 0$

(2)  $x^3y^3 + y - x = 0$

(3)  $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$  (デカルトの正葉線)

(1) 式の両辺を  $x$  で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \quad (3)$$

となる。よって

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

となる。式 (3) の両辺を  $x$  で微分すると

$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^2}$$

となる。

(2) 式の両辺を  $x$  で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \quad (4)$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (4) の両辺を  $x$  で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。

(3) 式の両辺を  $x$  で微分すると

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0 \quad (5)$$

となる。よって

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

となる。式 (5) の両辺を  $x$  で微分すると

$$6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$$

となるの。

$$2(x - y' + yy'^2) + (y^2 - x)y'' = 0$$

と変形する。

$$\begin{aligned}x - y' + yy'^2 &= x + y'(yy' - 1) = x + \frac{x^2 - y}{x - y^2} \left( y \frac{x^2 - y}{x - y^2} - 1 \right) \\&= x \left( 1 + \frac{(x^2 - y)(xy - 1)}{(x - y^2)^2} \right) = xy \left( \frac{x^3 - 3xy + y^3 + 1}{(x - y^2)^2} \right) \\&= \frac{xy}{(x - y^2)^2} \quad (\text{変形の途中で } x^3 - 3xy + y^3 = 0 \text{ を使用})\end{aligned}$$

なので

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

となる。