

演習問題 3.9 命題 4.5 を証明せよ。

演算子を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

し、微分方程式を

$$Ly = 0 \tag{1}$$

とする。微分の線型性より $D(ay) = aDy$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(ay) = D(D(ay)) = D(aDy) = aD(Dy) = aD^2y$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(ay) = aD^ky$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(ay) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(ay) \\ &= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay) \\ &= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y \\ &= a(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y) \\ &= a(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y \\ &= aLy \end{aligned}$$

が成立する。よって y が線型微分方程式 (1) の解ならば ay も (1) の解である。

微分の線型性より $D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(y_1 + y_2) = D(D(y_1 + y_2)) = D(Dy_1 + Dy_2) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(y_1 + y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^n(y_1 + y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1 + y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1 + y_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)(D^ny_1 + D^ny_2) + a_{n-1}(x)(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2) + \cdots + a_1(x)(Dy_1 + Dy_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1 \\ &\quad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2 \\ &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_1 \\ &\quad + (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_2 \\ &= Ly_1 + Ly_2 \end{aligned}$$

が成立する。よって y_1 および y_2 が線型微分方程式 (1) の解ならば $y_1 + y_2$ も (1) の解である。

演習問題 3.10 次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

$$(1) y' + y \sin x = 0$$

$$(2) y' + (x+1)y = 0$$

$$(3) y' + e^{2x}y = 0$$

$$(4) y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(5) y'' - y' - 6y = 0$$

$$(6) y'' + y = 0$$

$$(7) y'' + 4y = 0$$

$$(8) y'' - 2y' + y = 0$$

$$(9) y'' + 4y' + 4y = 0$$

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int \sin x \, dx = -\cos x$ より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から $e^{-\cos x}$ をかけると

$$D(e^{-\cos x})y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\cos x} y = C$$

となるので

$$y = C e^{\cos x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x+1))y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int (x+1) \, dx = \frac{1}{2}x^2 + x$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x+1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\right) y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると

$$D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 5D + 6 = (D - 3)(D - 2)$ なので微分方程式は $(D - 3)(D - 2)y = 0$ となる。 $u = (D - 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 3)u = 0$ となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} u = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $D e^{-3x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 2)y = C_1 e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x} D e^{-2x} = D - 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{2x} D e^{-2x} y = C_1 e^{3x}$ となるが、両辺に左から e^{-2x} をかけると $D e^{-2x} y = C_1 e^x$ となる。両辺を積分すると $e^{-2x} y = C_1 e^x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

となる。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - D - 6 = (D - 3)(D + 2)$ なので微分方程式は $(D - 3)(D + 2)y = 0$ となる。 $u = (D + 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 3)u = 0$ となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $D e^{-3x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1 e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{3x}$ となるが、両辺に左から e^{2x} をかけると $D e^{2x} y = C_1 e^{5x}$ となる。両辺を積分すると $e^{2x} y = \frac{C_1}{5} e^{5x} + C_2$ となるので $y = \frac{C_1}{5} e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ となる。 $\frac{C_1}{5}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 1 = (D - i)(D + i)$ なので微分方程式は $(D - i)(D + i)y = 0$ となる。 $u = (D + i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - i)u = 0$ となる。

$$e^{ix} D e^{-ix} = D - i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{ix}De^{-ix}u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-ix} をかけると $De^{-ix}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-ix}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + i)y = C_1e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix}De^{ix} = D + i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-ix}De^{ix}y = C_1e^{ix}$ となるが、両辺に左から e^{ix} をかけると $De^{ix}y = C_1e^{2ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{ix}y = \frac{C_1}{2i}e^{2ix} + C_2$ となるので $y = \frac{C_1}{2i}e^{ix} + C_2e^{-ix}$ となる。 $\frac{C_1}{2i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$$

となる。

(7) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4 = (D - 2i)(D + 2i)$ なので微分方程式は $(D - 2i)(D + 2i)y = 0$ となる。 $u = (D + 2i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 2i)u = 0$ となる。

$$e^{2ix}De^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{2ix}De^{-2ix}u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-2ix} をかけると $De^{-2ix}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-2ix}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{2ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2i)y = C_1e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix}De^{2ix} = D + 2i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2ix}De^{2ix}y = C_1e^{2ix}$ となるが、両辺に左から e^{2ix} をかけると $De^{2ix}y = C_1e^{4ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{2ix}y = \frac{C_1}{4i}e^{4ix} + C_2$ となるので $y = \frac{C_1}{4i}e^{2ix} + C_2e^{-2ix}$ となる。 $\frac{C_1}{4i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{2ix} + C_2e^{-2ix}$$

となる。

(8) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D + 1 = (D - 1)(D - 1)$ なので微分方程式は $(D - 1)(D - 1)y = 0$ となる。 $u = (D - 1)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 1)u = 0$ となる。

$$e^x D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^x D e^{-x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-x} をかけると $D e^{-x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^x$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 1)y = C_1 e^x$$

となる。

$$e^x D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^x D e^{-x} y = C_1 e^x$ となるが、両辺に左から e^{-x} をかけると $D e^{-x} y = C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{-x} y = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

となる。

(9) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4D + 4 = (D + 2)(D + 2)$ なので微分方程式は $(D + 2)(D + 2)y = 0$ となる。 $u = (D + 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D + 2)u = 0$ となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{2x} をかけると $D e^{2x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{2x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{-2x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1 e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{-2x}$ となるが、両辺に左から e^{2x} をかけると $D e^{2x} y = C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{2x} y = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

演習問題 3.11 次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$

(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3) $y'' - y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(1) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。 $y_1 = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$ および $y_2 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$ は微分方程式の解であり、実数値関数である。

$$C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

が一般解であることを示す。

$A = \{y \mid (D^2 + 1)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$, $B = \{C_1 \cos x + C_2 \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$ とする。 y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ と書くことができる。 $y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ なので

$$y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり、 $B \subseteq A$ となる。 $y \in A$ を任意の元とするとき、 $z = y(0) \cos x + y'(0) \sin x$ とおくと、

$$z(0) = y(0) \cos 0 + y'(0) \sin 0 = y(0)$$

であり、

$$z'(0) = -y(0) \sin 0 + y'(0) \cos 0 = y'(0)$$

となる。 y, z はともに微分方程式 $(D^2 + 1)y = 0$ の解であり、 $y(0) = z(0)$, $y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり、 $A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

(2) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。 $y_1 = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} = \cos \omega x$ および $y_2 = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} = \sin \omega x$ は微分方程式の解であり、実数値関数である。

$$C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

が一般解であることを示す。

$A = \{y \mid (D^2 + \omega^2)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$, $B = \{C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$ とする。 y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ と書くことができる。 $y'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x$ なので

$$y'' + \omega^2 y = -C_1 \omega^2 \cos \omega x - C_2 \omega^2 \sin \omega x + \omega^2 (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり, $B \subseteq A$ となる。 $y \in A$ を任意の元とすると, $z = y(0) \cos \omega x + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x$ とおくと,

$$z(0) = y(0) \cos 0 + \frac{y'(0)}{\omega} \sin 0 = y(0)$$

であり,

$$z'(0) = -\omega y(0) \sin 0 + \frac{y'(0)}{\omega} \omega \cos 0 = y'(0)$$

となる。 y, z はともに微分方程式 $(D^2 + \omega^2)y = 0$ の解であり, $y(0) = z(0)$, $y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり, $A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

(3) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと, 一般解として

$$C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$y_1 = \frac{\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}{2} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{および}$$

$$y_2 = \frac{\exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) - \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}{2i} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

は微分方程式の解であり, 実数値関数である。

$$C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

が一般解であることを示す。 $A = \{y \mid (D^2 - D + 1)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$,

$B = \left\{ C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とする。 y を B の任意

の元とすると実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$ と書くことができる。

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &\quad + C_2 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -C_1 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &\quad - C_2 \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

なので

$$y'' - y' + y = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり, $B \subseteq A$ となる。

$y \in A$ を任意の元とするとき,

$$z = y(0) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}y'(0) - \frac{1}{\sqrt{3}}y(0)\right) \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

とおくと, y, z はともに微分方程式 $(D^2 - D + 1)y = 0$ の解であり, $y(0) = z(0)$, $y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり, $A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

(4) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと, 一般解として

$$C_1 \exp((1+i)x) + C_2 \exp((1-i)x)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$y_1 = \frac{\exp((1+i)x) + \exp((1-i)x)}{2} = e^x \cos x \quad \text{および}$$
$$y_2 = \frac{\exp((1+i)x) - \exp((1-i)x)}{2i} = e^x \sin x$$

は微分方程式の解であり, 実数値関数である。

$$C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

が一般解であることを示す。 $A = \{y \mid (D^2 - 2D + 2)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$,

$B = \{C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$ とする。 y を B の任意の元とすると実数 C_1, C_2 が存

在して $y = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$ と書くことができる。このとき

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

が成立する。よって $y \in A$ であり, $B \subseteq A$ となる。

$y \in A$ を任意の元とするとき,

$$z = y(0)e^x \cos x + (y'(0) - y(0))e^x \sin x$$

とおくと, y, z はともに微分方程式 $(D^2 - 2D + 2)y = 0$ の解であり, $y(0) = z(0)$, $y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり, $A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

演習問題 3.12 次が成立することを示せ。

2 次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり、 $\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ が成立する。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが、両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $D e^{-\alpha x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが、両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$D e^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。 $\alpha \neq \beta$ のときは両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\frac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha = \beta$ のときは $e^{(\alpha - \beta)x} = 1$ なので両辺を積分すると

$$e^{-\alpha x} y = C_1 x + C_2$$

となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 3.13 次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。 $\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ が成立する。ただしここで $\alpha = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\beta = \lambda_1 - i\lambda_2$ とする。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが、両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $D e^{-\alpha x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが、両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$D e^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\frac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

複素数値関数の解として

$$y_1 = e^{\alpha x} = e^{(\lambda_1 + i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x + i \sin \lambda_2 x)$$

$$y_2 = e^{\beta x} = e^{(\lambda_1 - i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x)$$

の 2 つがあるが, これから実数値関数 z_1, z_2 を

$$z_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x$$

$$z_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

を構成することができる。このとき

$$C_1 z_1 + C_2 z_2$$

が一般解であることを示す。

即ち $A = \{y \mid (D^2 + aD + b)y = 0, y \text{ は実数値関数}\}$, $B = \{C_1 z_1 + C_2 z_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$ とするとき $A = B$ を示す。

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \beta) = t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta \\ &= t^2 - (\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_1 - i\lambda_2)t + (\lambda_1 + i\lambda_2)(\lambda_1 - i\lambda_2) = t^2 - 2\lambda_1 t + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \end{aligned}$$

より $a = -2\lambda_1$, $b = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ が成立している。 y を B の任意の元とする。ある実数 C_1, C_2 が存在して $y = C_1 z_1 + C_2 z_2$ とかかわれている。

$$\begin{aligned} y'' + ay' + y &= C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + aC_1 z_1' + aC_2 z_2' + bC_1 z_1 + bC_2 z_2 \\ &= C_1 ((\lambda_1^2 - \lambda_2^2)e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x) + C_2 ((\lambda_1^2 - \lambda_2^2)e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + 2\lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x) \\ &\quad + aC_1 (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x - \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x) + aC_2 (\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + \lambda_2 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x) \\ &\quad + bC_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + bC_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \\ &= C_1 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + a\lambda_1 + b)e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_1 (-2\lambda_1 \lambda_2 - a\lambda_2)e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \\ &\quad + C_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + a\lambda_1 + b)e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x + C_2 (2\lambda_1 \lambda_2 + a\lambda_2)e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x = 0 \end{aligned}$$

なので $y \in A$ が成立する。よって $B \subseteq A$ である。

$y \in A$ を任意の元とする。 $C_1 = y(0)$, $C_2 = \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2}$, $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ とおく。

$$z(0) = C_1 z_1(0) + C_2 z_2(0) = y(0) \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = y(0)$$

であり,

$$\begin{aligned} z'(0) &= C_1 z_1'(0) + C_2 z_2'(0) \\ &= y(0)\lambda_1 + \frac{y'(0) - y(0)\lambda_1}{\lambda_2} \lambda_2 = y'(0) \end{aligned}$$

となる。 y, z はともに微分方程式 $(D^2 + aD + b)y = 0$ の解であり, $y(0) = z(0)$, $y'(0) = z'(0)$ となっている。よって微分方程式の解の一意性定理より $y = z$ となる。よって $y \in B$ であり, $A \subseteq B$ が成立する。以上により $A = B$ が示された。

演習問題 3.14 次の微分方程式を解け。

$$(1) \frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$$

$$(4) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x + 4$$

$$(5) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \sin x$$

$$(6) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x}De^{-3x}y = e^{2x}$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D(e^{-3x})y = e^{-x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-3x}y = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 2)y = \sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D + 2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x}De^{2x}y = \sin x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D(e^{2x})y = e^{2x} \sin x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{2x}y = \frac{2}{5}e^{2x} \sin x - \frac{1}{5}e^{2x} \cos x + C$$

となるので

$$y = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + Ce^{-2x}$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 3)y = x^2 + x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x}De^{3x} = D + 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x}De^{3x}y = x^2 + x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D(e^{3x})y = e^{3x}(x^2 + x)$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{3x}y = \frac{1}{3}e^{3x}x^2 + \frac{1}{9}e^{3x}x - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となるので

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} + Ce^{-3x}$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D + 1)(D - 3)$ なので微分方程式は $(D + 1)(D - 3)y = x + 4$ となる。 $u = (D - 3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D + 1)u = x + 4$ となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = x + 4$ となるが、両辺に左から e^x をかけると $De^xu = (x + 4)e^x$ となる。両辺を積分すると $e^xu = xe^x + 3e^x + C_1$ となるので

$$u = x + 3 + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 3)y = x + 3 + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = x + 3 + C_1e^{-x}$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y = xe^{-3x} + 3e^{-3x} + C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{10}{9}e^{-3x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$ となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = \sin x$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = \sin x$ となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = \sin x$ となるが、両辺に左から e^x をかけると $De^xu = e^x \sin x$ となる。両辺を積分すると $e^xu = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + C_1$ となるので

$$u = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{-x}$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y = \frac{1}{2}e^{-3x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-3x} \cos x + C_1 e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = \frac{1}{10}e^{-3x} \cos x - \frac{1}{5}e^{-3x} \sin x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2 e^{3x}$ となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = e^{2x}$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = e^{2x}$ となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = e^{2x}$ となるが、両辺に左から e^x をかけると $De^xu = e^{3x}$ となる。両辺を積分すると $e^xu = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1$ となるので

$$u = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 3)y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x}$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y = \frac{1}{3}e^{-x} + C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = -\frac{1}{3}e^{2x} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$ となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}e^{2x} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。