解析学 II 要綱 #3　　2010–4–26　河野

1.3 微積分の基本定理

命題 1.10 関数 f は $[a,b]$ で連続とする。$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ [1][2] とおくと，$F'(x)=f(x)$ が成立する。即ち $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数である。

証明　$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_a^{x+h} f(x)\,dx+\int_x^a f(x)\,dx=\int_x^{x+h} f(x)\,dx$ より，積分の平均値の定理を用いると，ある c が存在して $F(x+h)-F(x)=f(c)h$ と書ける。ここで h は x と $x+h$ の間の実数。$F(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$ を得る。

定理 1.11 [**微積分の基本定理**] 関数 f は $[a,b]$ で**連続**とする。G を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$$

が成立する。

証明　G は f の原始関数なので $G'(x)=f(x)$ が成立している。命題 1.10 より $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ も $F'(x)=f(x)$ を満たす。$H(x)=F(x)-G(x)$ とおくと，$H'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$，よって $H(x)$ は定数である。これを C とおくと，$F(x)=G(x)+C$ である。これに $x=a$ を代入すると，$F(a)=0$ なので，$0=G(a)+C$，よって $C=-G(a)$ となる。$F(x)=G(x)-G(a)$ に $x=b$ を代入すると求める式が得られる。 ∎

$G(b)-G(a)$ を $\Big[G(x)\Big]_a^b$ とも書く。この定理により，**連続な関数**の積分計算において不定積分を用いた計算が可能になる。この定理を用いると

$$\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

という高校時代から行っている計算が可能になる。

ここで連続というのは重要な制限であって，連続でない関数に適用してはいけない。例えば次の計算は**間違い**である[3]。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx=\Big[\log|x|\Big]_{-1}^1=\log|1|-\log|-1|=\log 1-\log 1=0$$

(1) テキストではこの形のものを不定積分と呼び，原始関数と区別している。この講義ではこの定義は採用せず，不定積分と原始関数は特に区別しない事にする。

(2) 積分 dx の x と上端の値 x が同じ x で表されている事に違和感を感じる人もいるかもしれない。dx の方の x を別の文字に変えても式の意味は変わらない。例えば $\int_a^x f(t)\,dt$ は元の式と同じである。

(3) テストでこの様な間違った計算をするものがいる。少なくともこの footnote を見た学生はこの様な間違いをしないでほしい。

被積分関数が連続のとき不定積分の所で扱った定理を適用できる。特に積分に関して部分積分法，置換積分法を使用できる。被積分関数の連続性を保証するため，C^1 級等の条件が必要になる点に注意する事。解析学 I で学んだように，関数 f が C^1 級とは導関数 f' が連続と定義された。

定理 1.12 [部分積分法] f, g が C^1 級のとき次が成立する。

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定理 1.13 [置換積分法] f は連続,$x = \varphi(t)$ は C^1 級とする。$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ とすると次が成立する。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

定理 1.12 の証明： $F(x) = \displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx$，$G(x) = \displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx$ と置くと不定積分の部分積分法より

$$F(x) = f(x)g(x) - G(x)$$

が成立している。x に a 及び b を代入すると

$$F(b) = f(b)g(b) - G(b), \quad F(a) = f(a)g(a) - G(a)$$

が成立している。被積分関数は連続なので微積分の基本定理より

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= F(b) - F(a) = f(b)g(b) - G(b) - \big(f(a)g(a) - G(a)\big) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \big(G(b) - G(a)) \\ &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

が成立する。■

定理 1.13 の証明： $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$，$G(t) = \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ とおくと，不定積分の置換積分法より，x と t は $x = \varphi(t)$ の関係にあるとき $F(x) = G(t)$ が成立している。$a = \varphi(\alpha)$ 及び $b = \varphi(\beta)$ より $F(a) = G(\alpha)$ 及び $F(b) = G(\beta)$ が成立している。被積分関数は連続なので微積分の基本定理より

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a) = G(\beta) - G(\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

が成立する。■

例 1.14 (1) 部分積分法： $I = \displaystyle\int_0^1 x \arctan x\,dx$ を計算する。

$t = \arctan x$ は「$x = \tan t$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$」と同値であるから，$\arctan 0 = 0, \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ である。$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x$ である事に注意する。

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctan x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

を得る。ここで

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \Big[x\Big]_0^1 - \Big[\arctan x\Big]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

なので $I = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$ である。

(2) 置換積分法： $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ を計算する。$x = \sin t$ とおくと，$x : 0 \to 1$ のとき $t : 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ である。$x' = \cos t$ なので

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos 2t + 1\}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

を得る。

被積分関数が偶関数または奇関数で積分領域が $[-a, a]$ の場合は少し計算が簡単になる。ここで $f(x)$ が**偶関数**とは任意の x に対し $f(-x) = f(x)$ が成立することであり，**奇関数**とは $f(-x) = -f(x)$ が成立することをいう。このとき次が成立する。

命題 1.15

(1) $f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ が成立する。

(2) $f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$ が成立する。

(1) の証明： $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = \int_{-a}^0 f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$ が成立する。ここで $x = \varphi(t) = -t$ とおき，右辺の最初の式を置換積分する。$\varphi'(t) = -1$ であり，$-a = \varphi(a), 0 = \varphi(0)$ なので，$f(x)$ が偶関数に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^0 f(x)\, dx &= \int_a^0 f(-t)(-1)\, dt = -\int_a^0 f(-t)\, dt \\
&= -\int_a^0 f(t)\, dt = (-1) \times (-1)\int_0^a f(t)\, dt \\
&= \int_0^a f(t)\, dt = \int_0^a f(x)\, dx
\end{aligned}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(x)\, dx &= \int_{-a}^0 f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx \\
&= \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx
\end{aligned}$$

となる。(2) は演習問題とする。 ■

演習問題 1.4　命題 1.15 を証明せよ。

演習問題 1.5　次の定積分を微積分の基本定理を用いて計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin^3 x-\sin x\right)\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

ここで微分，不定積分，定積分の関係について述べておこう。解析学 I で学んだように「不定積分 = 微分の逆」であった。積分は，分割に対しリーマン和を考え，分割を細かくしているときの極限として定義された。確認すべき**第 1 の点として，**定義としては「定積分」と「不定積分」の間に関係が見当たらない，むしろ無関係に見えるという事がある。**第 2 の点としては，**その定義としては無関係に見える両者が,「連続関数の場合は密接な関係を持つ」というのが**微積分の基本定理**であり，「その発見 = 微積分学の成立」と言ってよい重要な内容であるということがある。**第 3 番目に**指摘しておきたいのは，一見無関係に見える積分と微分の定義であるが，よく見ると密接に関連している事が分かる。$F(x)$ をある関数として，$f(x)=F'(x)$ とする。$f(x)$ の $[0,a]$ における積分を考える。分割を $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ とする。小区間 $[x_{i-1},x_i]$ の内部に点 c_i をとり，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ とおき，リーマン和 $\Sigma(\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1} f(c_i)\Delta x_i$ を考える。図 1.3 は $F(x)=x^2, f(x)=2x$ を想定して描いてある。$f(c_i)\Delta x_i$ は小区間 $[x_{i-1},x_i]$ における $F(x)$ の増分を近似していると考える事ができる。その和なので $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ は小区間の増分の和，即ち前区間における増分を表していると考える事ができる。以上により $\|\Delta\|\to 0$ とするとき，$\Sigma(\Delta)\to F(a)-F(0)$ となる事が予想される。

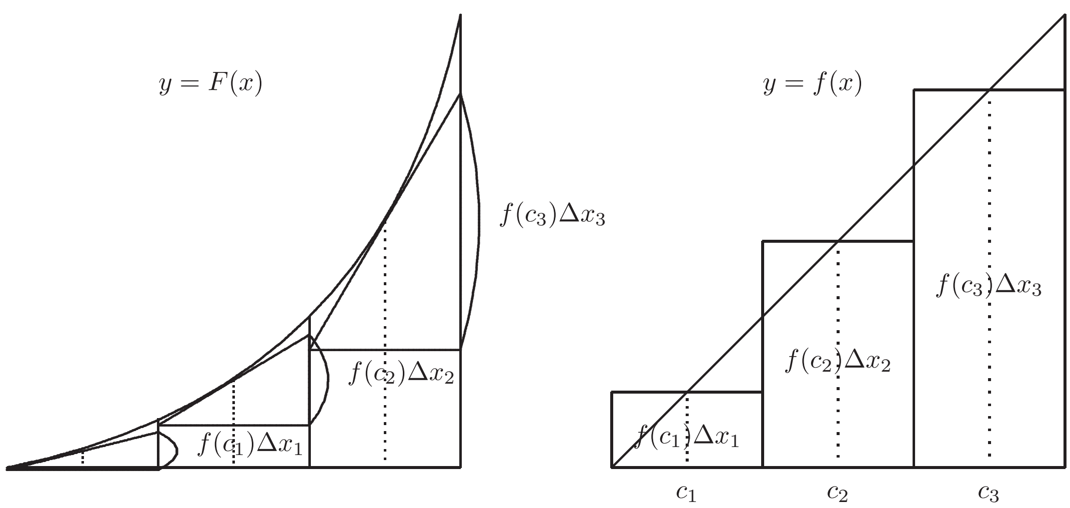

図 1.3