解析学 II 要綱 #4

2010–5–10 河野

1.4 広義積分

積分の定義においては関数は有界であり，積分区間も有界な閉区間であった。ここではその制限をはずせる場合にはずし，積分の意味を拡張する。これらは**広義積分**と呼ばれる。

例から始めよう。関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 1 から M まで f を積分したものを $I(M)$ とすると，

$$I(M) = \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

となる。ここで $\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M) = \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)\,dx = 1$ となるので，$\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx = 1$ と書く事が許されるだろう。

関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 ε から 1 まで f を積分したものを $J(\varepsilon)$ とすると，

$$J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x} \Big]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となる。ここで $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} J(\varepsilon) = 2$ となるので，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2$ と書く事が許されるだろう。

以上の例から次を定義する。幾つかの type があるが，最後に一般的な形を扱う。

定義 1.16

(1) 関数 f は $(a, b]$ で連続とする。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する」という。

(2) 関数 f は $[a, b)$ で連続とする。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する」という。

(3) 関数 f は $[a,\infty)$ で連続とする。$I(M)=\displaystyle\int_a^M f(x)\,dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M)$ が収束するとき

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束する」という。

(4) 関数 f は $(-\infty,b]$ で連続とする。$I(N)=\displaystyle\int_N^b f(x)\,dx$ とおく。$\displaystyle\lim_{N\to-\infty} I(N)$ が収束するとき

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^b f(x)\,dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ は収束する」という。

(5) 関数 f は有限個の点 $a_1,\dots,a_n$ を除いて (A,B) で連続とする。ただし $A=-\infty$, $B=\infty$ の場合も含むとする。$n+1$ 個の点 $c_0,c_1,\dots,c_n$ を $c_0<a_1<c_1<a_2<\cdots<a_n<c_n$ となる様にとる。次のすべての広義積分が収束するとき，広義積分 $\displaystyle\int_A^B f(x)\,dx$ は収束するという。

$$\int_A^{c_0} f(x)\,dx,\ \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx,\ \int_{a_i}^{c_i} f(x)\,dx,\ \int_{c_n}^{B} f(x)\,dx$$

広義積分の値はこれらのすべての和で定義する。即ち

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^{c_0} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{c_i} f(x)\,dx + \int_{c_n}^B f(x)\,dx$$

で定義する。

例 1.17

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi$: この広義積分は (5) のタイプである。分点 c_0 として 0 を選ぶ。$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ が共に収束していれば値が求まる。$I(M)=\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx$ する。$x=\tan t$ とおき置換積分を行う。$0=\arctan 0$ である。また $M'=\arctan M$ とおくと，$dx=(1+x^2)dt$ なので，$I(M)=\displaystyle\int_0^{M'} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)\,dt=\int_0^{M'} dt = M'$

$M\to\infty$ のとき，$M'\to\dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$\lim_{M\to\infty} I(M) = \lim_{M'\to\frac{\pi}{2}} M' = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ も同様に計算できて $\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi$: (1) は積分区間を見ると，広義積分である事が分かったが，この場合は被積分関数を見る必要がある。この関数は区間の両端で無限大となるので,(5) のタイプの

広義積分になっている。分点を 0 とする。$x = \sin t$ と変数変換を行う。$0 = \arcsin 0$ である。$u = \arcsin(1-\varepsilon)$ とおく。$\varepsilon \to +0$ のとき $u \to \dfrac{\pi}{2}$ である。$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ とおくと，$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^u \frac{1}{\cos t}\cos t\,dt = u$ なので $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} I(\varepsilon) = \lim_{u \to \frac{\pi}{2}} u = \frac{\pi}{2}$ 同様に議論すれば $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ も分かる。

演習問題 1.6　次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$

1.5　物理量・面積・曲線の長さ

積分を用いると面積だけではなく，色々な物理量を求めることができる。その原理を確認しながら幾つかの物理量を計算しよう。最後に曲線の長さも計算する。

[**物理量**]　3 つの物理量 X, Y, Z の間に $Z = Y \times X$ の関係があるとき，量 Z は一般に積分を用いて求める事ができる(1)。

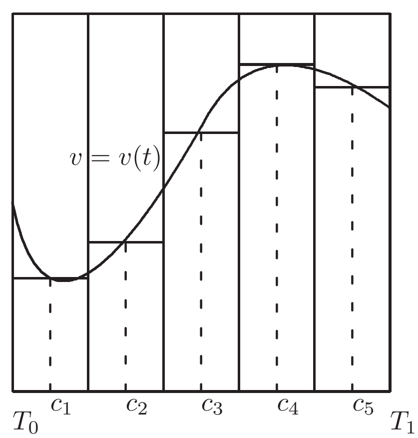

図 1.4

例えば (距離)=(速さ)×(時間) という関係がある。一定の速さ v で運動する物体が Δt の間に移動する距離は $v\Delta t$ となる。速さ v が変化する場合を考える。$v = v(t)$ として，時刻 T_0 から時刻 T_1 の間に移動する距離 ℓ を求てみよう。$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ を $[T_0, T_1]$ の分割とし，小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 内に点 c_i をとる ($i = 1, \ldots, n$)。また $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ と置く。

(1)「Z が外延量である」との制限が必要であるが，ここでは外延量，内包量に関してきちん説明はしない。ここでは Z が加法性を持つこと，即ち長さの様に $1m$ と $2m$ を加えると $3m$ になるような性質，を仮定しておく。

時刻 t_{i-1} から時刻 t_i の間に移動する距離は，その間物体が一定の速さ $v(c_i)$ で動いていると見做すと，$v(c_i)\Delta t_i$ で近似できる。よって時刻 T_0 から時刻 T_1 の間の移動距離は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ で近似できる。分割を細かくして行くとこれは $\displaystyle\int_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$ となる。以上により時刻 T_0 から時刻 t_1 の間に動いた距離 ℓ は

$$\ell = \int_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$$

で与えられる事が分かる。

同様の議論を一般の場合に行うと次が得られる。量 X が $x_0 \longrightarrow x_1$ と変化するとき，Y が一定のとき，$Z = Y \times (x_1 - x_0)$ と表される量 Z があるとする。X が $x_0 \longrightarrow x_1$ と変化するとき，Y が $Y = Y(x)$ で与えられるとする。量 X が x_0 から x_1 まで変化したときの量 Z は

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} Y(x)\,dx$$

で与えられる。

「(面積)=(縦)×(横)」なので，$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqq x \leqq b, 0 \leqq y \leqq f(x) \right\}$ の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」である。空間内の領域が R を考える。平面 $x = u$ と R の共通部分の面積を $m(u)$ とする。即ちここでは「(体積) =(面積)×(高さ)」と見ている。$x < a$ または $x > b$ のとき $m(x) = 0$ とする。R の体積 V は

$$V = \int_a^b m(x)\,dx$$

で与えられる。

xy 平面上の連続曲線 $y = f(x) \geqq 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ と x 軸及び 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させて生じる回転体の体積を考える。平面 $x = t$ で切った断面の面積は $\pi f(t)^2$ なので求める体積は

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

となる。

演習問題 1.7　半径 r の球の体積を求めよ。

演習問題 1.8　$y = x^2$ と $y = 5x$ にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

演習問題 1.9　「(仕事)=(力)×(移動距離)」という関係がある。バネが x 伸ばされたとき働く力は k を比例定数とすると，$F = kx$ であった。バネを x 伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

演習問題 1.10　速度 V で走っている質量 M の車が等加速度運動 (等減速度運動と言うべきか) して停止した。このとき車を止めるために必要な仕事の量を M と V を用いて表せ。次は少し難

しい問題，* 付きと考えること： 等加速度運動でない場合に関しても，仕事の量を計算せよ。結果的には前と同じ答えになる(2)。

密度が一様でない銅線を考える。密度が一定のときは「(質量)=(線密度) ×(長さ)」という関係がある。導線は $[a,b]$ に置かれているとする。点 x における線密度を $\mu(x)$ とするときこの銅線の質量 K は

$$K=\int_a^b \mu(x)\,dx$$

で与えられる。

質量 K の質点が x 軸上の x 座標が a である点にあるとする。この質点の (原点に関する) モーメントは aK である。密度が一様でない銅線が $[a,b]$ に置かれていて，点 x における線密度を $\mu(x)$ とするときこの銅線のモーメント M は

$$M=\int_a^b x\mu(x)\,dx$$

で与えられる。物体の重心とは，その物体の全質量がその点に存在する様な質点を考えたとき，そのモーメントが物体のモーメントと等しいような点なので，この導線の重心を c とすると

$$c\int_a^b \mu(x)\,dx=\int_a^b x\mu(x)\,dx$$

となる。

演習問題 1.11 一様な密度の半円板 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 1, y\geqq 0\right\}$ の重心の座標を求めよ。

演習問題 1.12 一様な密度の材質でできている高さ h の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

[面積] ここでは曲線が極座標表示されている場合と，パラメータ表示されている場合の面積の求め方を考える。曲線 C が $r=f(\theta)$ $(\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2)$ で与えられているとき，曲線 C 及び x 軸とのなす角 θ_0 である直線となす角が θ_1 である直線に囲まれた部分の面積 S を求める事を考える。

半径 r の円において角が θ_1 から θ_2 の部分の扇形の面積は $\dfrac{r^2}{2}(\theta_2-\theta_1)$ なので，

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\,d\theta$$

となる。

同じ曲線が $(x,y)=(x(t),y(t))$ $(t_0\leqq t\leqq t_1)$ とパラメータ表示されているとする。このとき $\tan\theta=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ より $\theta=\arctan\dfrac{y(t)}{x(t)}$ となるので，

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)^2}\frac{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)}{x(t)^2}=\frac{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)}{x(t)^2+y(t)^2}$$

(2) 仕事の量は速度の 2 乗に比例します。よく知られているように 120km/時の車を止めるには，60km/時の車の 4 倍の仕事量が必要になります。車を運転する人は十分注意して下さい

となる。$f(\theta)^2 = r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ なので，積分の変数変換を行うと

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\, dt$$

となる。

演習問題 *1.13 $(x(t), y(t))$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ が閉曲線のとき，即ち $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1))$ のとき，この閉曲線で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\, dt$$

である事を示せ。

演習問題 1.14 $r = f(\theta) = 1 + \cos\theta$ と極座標表示されている曲線を**心臓形** (*cardioid*) という。これについて次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

演習問題 1.15 $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[**曲線の長さ**] 次に曲線の長さを求める事を考える。平面上の曲線 C がパラメータ t により $x = x(t), y = y(t),$ $(a \leqq t \leqq b)$ と表されているとする。$[a, b]$ の分割 Δ を考える。

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$P_i = ((x(t_i), y(t_i))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ とし折れ線 $P_0P_1 \cdots P_n$ で曲線 C を近似する。折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2}(t_i - t_{i-1})$$

となる。ただし c_i, d_i は $t_{i-1} \leqq c_i, d_i \leqq t_i$ となる実数である。ここで分割を細かくしていった極限を考えると，極限では

$$(\text{曲線 } C \text{ の長さ}) = \int_a^b \left\{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\right\} dt$$

となる。

演習問題 1.16 演習問題 1.14 の曲線の長さを求めよ。

演習問題 1.17 極座標表示された曲線 $r = f(\theta) = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$ の概形を書き，全長を求めよ。

演習問題 1.18 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ。