解析学 II 要綱 #6　　2010–5–31　　河野

2.2 累次積分

重積分を定義に基づいて計算するのは，例の計算を思い出せば分かるように，大変である。ここでは計算する方法として「累次積分」を紹介する。累次積分を標語的にいうと「2 重積分 $=$ 1 変数積分 2 回」である。3 重積分の場合は「3 重積分 $=$ 1 変数積分 3 回」，n 重積分の場合は「n 重積分 $=$ 1 変数積分 n 回」といえる。

最初に特別な形の領域に名前をつけておこう。領域 D が次の様に表す事ができるとき**縦線型**または**縦線領域**と呼ぶ。: 実数 a, b と $[a, b]$ で定義された連続関数 $y = g_1(x)$,$y = g_2(x)$ が存在して

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$$

と書ける。領域 D が次の様に表す事ができるとき**横線型**または**横線領域**と呼ぶ。: 実数 c, d と $[c, d]$ で定義された連続関数 $x = h_1(y)$,$x = h_2(y)$ が存在して

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$$

と書ける。

縦線型，横線型の領域は面積確定である。ある領域が縦線型でも横線型でもあるという場合もある。例えば円は縦線型かつ横線型である。例えば $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$ とする。$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2} \right\}$ となるので D は縦線型である。また $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2} \right\}$ となるので横線型でもある。

定理 2.5 [累次積分] D は縦線型とする。即ち $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \right\}$ とする。$f(x, y)$ は D で定義された連続関数とする。このとき D における f の積分 (重積分) に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx$$

また D が横線型のとき，即ち $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \right\}$ と書けるとき重積分に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

定理の証明は難しいので講義では省略する。参考書にも証明は書いていない。証明を知りたいものは，解析学 I で以前あげたテキスト (高木貞治「解析概論」，小平邦彦「解析入門」ともに岩波書店) などを参考に。

定理の 2 つの式の左辺は重積分，右辺は 1 変数積分を 2 回している事に注意。重積分を 1 変数関数の積分 2 回 (累次積分) に正しく直す事ができる様になる事がここのポイントである。領域が長方形の場合次の様に簡単になる。

系 2.6 D を長方形領域，即ち $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$ とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

テキストでは

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

という表記法も用いているが，混乱をおこす場合があるので，この講義では採用しない。ただし各自がこの表記で計算する事を禁止するものではない。

例をいくつか計算してみよう。

例 2.7 (1) 最初に $I = \iint_D x^2 ydxdy$ $(D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1 \right\})$ を考える。D は縦線型とも横線型とも見る事ができるので 2 通りの計算を実行しよう。注意：重積分の計算のときは積分領域を必ず図示する事!! 縦線型と見ると $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1-x$ となるので，

$$I = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} x^2 y\,dy \right\} dx$$

という累次積分の形にできる。後は 1 変数の積分を実行すればよい。実行すると

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ x^2 - 2x^3 + x^4 \right\} dx = \frac{1}{60}$$

となる。変数が 2 つあるため，定積分の計算の代入のとき間違った変数に代入する事がある。そのために $\left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{1-x}$ という記号を採用した。

D を横線型と見做して同様の計算ができる。$0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq x \leqq 1-y$ なので，

$$I = \iint_D x^2 ydxdy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} x^2 y\,dx \right\} dy$$

となり，

$$I = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{x=0}^{1-y} dy = \int_0^1 \frac{1}{3} (1-y)^3 y\,dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \left\{ y - 3y^2 + 3y^3 - y^4 \right\} dy = \frac{1}{60}$$

を得る。

2 重積分を累次積分で計算するとき，領域が縦線型かつ横線型であれば，x と y のどちらを先に積算してもよい。しかし計算の複雑さが大きく変わる場合がある。x を先に計算して複雑になってしょうがないときは，y を先に計算してみるのも 1 つの方法である。

(2) 次に $I = \iint_D |\sin(x+y)|dxdy$ $(D = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 2\pi\})$ を考える。被積分関数に絶対値がついているので場合分けが必要になる。$\sin(x+y)$ は $0 \leqq x+y \leqq \pi$ では 0 以上，

$\pi \leqq x+y \leqq 2\pi$ では 0 以下なので $D_1 = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq \pi\}, D_2 = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, \pi \leqq x+y \leqq 2\pi\}$ と領域を分ける。$D_1 \cap D_2$ の面積は 0 なので

$$\iint_D |\sin(x+y)|dxdy = \iint_{D_1} |\sin(x+y)|dxdy + \iint_{D_2} |\sin(x+y)|dxdy$$

となる。D_1 を縦線型と見ると，

$$D_1 = \{0 \leqq x \leqq \pi, 0 \leqq y \leqq \pi - x\}$$

と表す事ができる。よって

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} |\sin(x+y)|dxdy = \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\pi-x} \sin(x+y)\, dy \right\} dx \\ &= \int_0^{\pi} \Big[-\cos(x+y) \Big]_{y=0}^{\pi-x} dx = \int_0^{\pi} (1+\cos x)\, dx = \pi \end{aligned}$$

となる。

また D_2 は縦線型にはなっているが，1 つの式で書く事ができないので更に 2 つの領域に分ける。$D_{21} = \{\, (x,y) \in D_2 \mid x \leqq \pi \,\}, D_{22} = \{\, (x,y) \in D_2 \mid x \geqq \pi \,\}$ とすると，$D_{21} \cap D_{22}$ の面積は 0 なので

$$I_2 = \iint_{D_2} |\sin(x+y)|dxdy = \iint_{D_{21}} |\sin(x+y)|dxdy + \iint_{D_{22}} |\sin(x+y)|dxdy$$

となる。$D_{21} = \{0 \leqq x \leqq \pi, \pi - x \leqq y \leqq 2\pi - x\}$, $D_{22} = \{\pi \leqq \leqq 2\pi, 0 \leqq y \leqq 2\pi - x\}$ と縦線型に書けるのでこれを計算して

$$I = I_1 + I_2 = \pi + 3\pi = 4\pi$$

となる。

演習問題 2.3　次の重積分について考える。ただし D は $y = x+1$ と $y = x^2 - 1$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D (x+y)dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し，その後 I を求めよ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 D を 2 つの領域 D_1, D_2 に分け，それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表せ。この方法で I を計算せよ。

演習問題 2.4　次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x dxdy \quad D = \{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$　　ただし $a > 0, b > 0$ とする。
(2) $\displaystyle\iint_D \{x+y\}\, dxdy \quad D = \{x^2 \leqq y \leqq x+2\}$
(3) $\displaystyle\iint_D \left\{2x^2 + 3y^3\right\} dxdy \quad D = \{x^2 + y^2 \leqq a^2\}$　　ただし $a > 0$ とする。

演習問題 2.5　次の重積分について考える。ただし $D=\{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I=\iint_D e^{-x^2}dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D をを横線形 ($\{\,(x,y)\mid c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) D を縦線形 ($\{\,(x,y)\mid a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。
(6) I を求めよ。