解析学 II 問題解説 #2

河野

演習問題 1.2　命題 1.7 を証明せよ。

(1)　$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\}$ とする。各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $x_{i-1} \leqq c_i \leqq x_i$ を満たす c_i を選んでリーマン和を考える。リーマン和

$$\begin{aligned}
\Sigma_f(\Delta; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
\Sigma_g(\Delta; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i \\
\Sigma_{f+g}(\Delta; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} \big(f(c_i) + g(c_i)\big)\Delta x_i
\end{aligned}$$

を考えると

$$\Sigma_{f+g}(\Delta; \{\, c_i \,\}) = \Sigma_f(\Delta; \{\, c_i \,\}) + \Sigma_g(\Delta; \{\, c_i \,\})$$

が成立している。ここで $\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

が得られる。

　αf のリーマン和は

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\alpha f}(\Delta; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha f(c_i)\Delta x_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= \alpha \Sigma_f(\Delta; \{\, c_i \,\})
\end{aligned}$$

なので，$\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$$

が得られる。

(2)　$\Delta_1 = \{\, y_0, y_1, \ldots, y_m \,\}$ を $[a,c]$ の分割 (即ち $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c$ が成立している) とし，$\Delta_2 = \{\, z_0, z_1 \ldots, z_\ell \,\}$ を $[c,b]$ の分割 (即ち $c = z_0 < z_1 < \cdots < z_\ell = b$ が成立している) とする。$x_i = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$，$x_i = z_{i-m}$ $(i = m+1, \ldots, m+\ell)$ とおくと $\{\, x_0, x_1, \ldots, x_{m+\ell} \,\}$ は $[a,b]$ の分割である。各 i $(i = 1, \ldots, m)$ に対し $y_{i-1} \leqq c_i \leqq y_i$ となる c_i を選ぶ。$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ とおく。各 i $(i = 1, \ldots, \ell)$ に対し $z_{i-1} \leqq d_i \leqq z_i$ となる d_i を選ぶ。$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ とおく。

$e_i = c_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$，$e_i = d_{i-m}$ $(i = m+1, \ldots, m+\ell)$ とおく。

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\Delta_1; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{m} f(c_i) \Delta y_i \\ \Sigma_2(\Delta_2; \{\, d_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{\ell} f(d_i) \Delta z_i \\ \Sigma(\Delta; \{\, e_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{m+\ell} f(e_i) \Delta x_i \end{aligned}$$

とおくと

$$\Sigma(\Delta; \{\, e_i \,\}) = \Sigma_1(\Delta_1; \{\, c_i \,\}) + \Sigma_2(\Delta_2; \{\, d_i \,\})$$

が成立している。ここで $\|\Delta_1\| \to 0$ かつ $\|\Delta_2\| \to 0$ とすると $\|\Delta\| \to 0$ となり，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

が得られる。

(4)　定数関数 τ に関してリーマン和は

$$\begin{aligned} \Sigma_\tau(\Delta; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} \tau(c_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\ &= b - a \end{aligned}$$

となるので $\|\Delta\| \to 0$ とすると

$$\int_a^b \tau(x)\,dx = b - a$$

が得られる。

演習問題 ***1.3**　　関数 f と区間 $[a,b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f,[a,b])$ が命題 4.6 の 4 つの性質を持つとき，この J は定義 4.1 で定義した積分と一致する事を示せ。

関数の積分可能性の問題を議論すると微妙な問題を含むので，ここででてくる関数はすべて積分可能として話を進める。微妙な問題に関心のある人は私の所へ来て下さい。

区間 $[a,b]$ では 1 となり，それ以外では 0 となる関数を $\tau_a^b(x)$ と書くことにする。c を $a < c < b$ を満たす数とする。f を $[a,c)$ では a_1，$(c,b]$ では a_2 を値にとる関数とする。c での値は任意とする。このとき $J(f;[a,b]) = a_1(c-a) + a_2(b-c)$ が成立することを示す。$d = \max\{\, a_1, a_2, f(c) \,\}$ とする。$\varepsilon > 0$ を $\min\{\, b-c, c-a \,\} > \varepsilon$ を満たす任意の正数とする。$g(x) = a_1\tau_a^{c-\varepsilon}(x) + d\tau_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(x) + a_2\tau_{c+\varepsilon}^b(x)$ とおくと $f(x) \leqq g(x)$ を満たしている。このとき

$$\begin{aligned} J(f;[a,b]) &\leqq J(g;[a,b]) \\ &= J(g;[a,c-\varepsilon]) + J(g;[c-\varepsilon,c+\varepsilon]) + (g;[c-\varepsilon]) \\ &= a_1(c-\varepsilon-a) + 2d\varepsilon + a_2(b-c-\varepsilon) \end{aligned}$$

となる。この式が任意の ε について成立するので，$J(f;[a,b]) \leqq a_1(c-a)+a_2(b-c)$ が成立する。また $e=\min\{\,a_1,a_2,f(c)\,\}$ とする。$\varepsilon>0$ を $\min\{\,b-c,c-a\,\}>\varepsilon$ を満たす任意の正数とする。$h(x)=a_1\tau_a^{c-\varepsilon}(x)+e\tau_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}(x)+a_2\tau_{c+\varepsilon}^{b}(x)$ とおくと $f(x)\geqq h(x)$ を満たしている。このとき

$$
\begin{aligned}
J(f;[a,b]) &\geqq J(h;[a,b]) \\
&= J(h;[a,c-\varepsilon])+J(h;[c-\varepsilon,c+\varepsilon])+(h;[c-\varepsilon]) \\
&= a_1(c-\varepsilon-a)+2e\varepsilon+a_2(b-c-\varepsilon)
\end{aligned}
$$

となる。この式が任意の ε について成立するので，$J(f;[a,b]) \geqq a_1(c-a)+a_2(b-c)$ が成立する。前の式と合わせて $J(f;[a,b])=a_1(c-a)+a_2(b-c)$ が成立する。

上の議論を繰り返すことにより，次を示すことができる。$\Delta=\{\,x_0,x_1,\ldots,x_n\,\}$ を $[a,b]$ の分割とする。g を $x_{i-1}\leqq x\leqq x_i$ に対しては $g(x)=a_i$ となり，x_i $(i=0,1,\ldots,n)$ では任意の値をとる関数とする。このとき

$$
J(g;[a,b])=a_1(x_1-x_0)+a_2(x_2-x_1)+\cdots+a_n(x_n-x_{n-1})
$$

となる。

分割 $\Delta=\{\,x_0,x_1,\ldots,x_n\,\}$ に対し m_i, M_i, $s(\Delta)$, $S(\Delta)$ を積分の定義において定義したものとする。g を $x_{i-1}\leqq x\leqq x_i$ に対しては $g(x)=M_i$ となり，$M_i=g(x_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ かつ $M_1=g(x_0)$ をみたす関数とする。このとき，任意の x $(a\leqq x\leqq b)$ に対し $f(x)\leqq g(x)$ が成立している。h を $x_{i-1}\leqq x\leqq x_i$ に対しては $h(x)=m_i$ となり，$m_i=h(x_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ かつ $m_1=h(x_0)$ をみたす関数とする。このとき，任意の x $(a\leqq x\leqq b)$ に対し $h(x)\leqq f(x)$ が成立している。このとき

$$
\begin{aligned}
J(g;[a,b]) &= M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(x_n-x_{n-1}) \\
&= S(\Delta) \\
J(h;[a,b]) &= m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(x_n-x_{n-1}) \\
&= s(\Delta)
\end{aligned}
$$

が成立する。J の単調性より

$$
J(h;[a.b])\leqq J(f;[a,b])\leqq J(g;[a,b])
$$

を得る。これに前式を代入すると

$$
s(\Delta)\leqq J(f;[a,b])\leqq S(\Delta)
$$

が得られる。ここで $\|\Delta\|\to 0$ とすると

$$
J(f;[a,b])=\int_a^b f(x)\,dx
$$

が得られる。