解析学 II 問題解説 #4

河野

演習問題 1.6　次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x\,dx$

(1) $I(N) = \displaystyle\int_N^0 e^x\,dx$ とおくと，

$$I(N) = \int_N^0 e^x\,dx = \Big[\ e^x\ \Big]_N^0 = 1 - e^N$$

となる。$\displaystyle\lim_{N\to-\infty} I(N) = 1 - \lim_{N\to-\infty} e^N = 1$ なので，

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$$

である。

(2) $I(M) = \displaystyle\int_1^M \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_1^M \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_1^M \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right\}dx \\ &= \Big[\ \log x - \log(x+1)\Big]_1^M = \log M - \log(M+1) - \log 1 + \log 2 \\ &= \log\frac{M}{M+1} + \log 2 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \lim_{M\to\infty} I(M) &= \lim_{M\to\infty} \log\frac{M}{M+1} + \log 2 \\ &= \log\left(\lim_{M\to\infty}\frac{M}{M+1}\right) + \log 2 \\ &= \log 1 + \log 2 = \log 2 \end{aligned}$$

なので $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \log 2$ である。

(3) $I(M) = \displaystyle\int_0^M \frac{1}{4+x^2}\,dx,\ J(N) = \int_N^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx$ とおく。$t = \arctan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{2}{4+x^2}$ であり，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4+x^2}{2}$ となる。$T = \arctan\dfrac{M}{2}$ とおくと，$x : 0 \to M$ のとき $t : 0 \to T$

となる。よって

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^M \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int_0^T [\frac{1}{4+x^2}\frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{4+x^2}\frac{4+x^2}{2}\,dt = \int_0^T \frac{1}{2}\,dt = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

となる。$M \to \infty$ のとき $T \to \dfrac{\pi}{2}$ となるので $\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M) = \frac{\pi}{4}$ となる。$J(N)$ も同様に計算すると $\displaystyle\lim_{N\to-\infty} J(N) = \frac{\pi}{4}$ が分かる。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} I(M) + \lim_{N\to-\infty} J(N) = \frac{\pi}{2}$$

となる。

(4) $I(M) = \displaystyle\int_0^M \cos x\,dx$ とおくと，$I(M) = \Big[\sin x\Big]_0^M = \sin M$ となる。$\displaystyle\lim_{M\to\infty} I(M) = \lim_{M\to\infty} \sin M$ は収束しない。よって広義積分は収束しない。

演習問題 1.7　半径 r の球の体積を求めよ。

半径 r の球の表面は $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqq x \leqq r)$ を x 軸のまわりに 1 回転させたものである。球と平面 $x = a$ $(-r \leqq a \leqq r)$ の共通部分の円の面積は $S(a) = \pi\big(\sqrt{r^2 - x^2}\big)^2$ なので

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} S(x)\,dx \\ &= \pi\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\,dx = \pi\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\,dx \\ &= \pi\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}r^3 \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.8　$y = x^2$ と $y = 5x$ にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

図は次ページ。曲線 $y = x^2$ と曲線 $y = 5x$ の交点の x 座標は $x = 0,\,5$ である。この範囲では $5x \geqq x^2$ なので求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{125}{6}$$

となる。この領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を V とする。
領域 $R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq 5, 0 \leqq y \leqq 5x\right\}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を

V_1，領域 $R_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 5, 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積を V_2 とすると，$V = V_1 - V_2$ である。

$$V_1 = \pi \int_0^5 (5x)^2 \, dx = 25\pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 = \frac{3125\pi}{3}$$

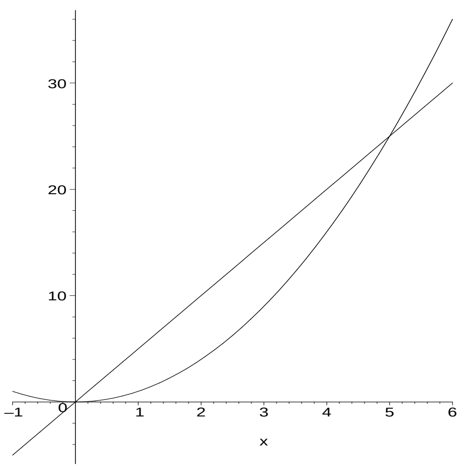
であり，

$$V_2 = \pi \int_0^5 \left(x^2\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^5 = 625\pi$$

なので，

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1250\pi}{3}$$

となる。



演習問題 1.9　「(仕事)=(力)×(移動距離)」という関係がある。バネが x 伸ばされたとき働く力は k を比例定数とすると，$F = kx$ であった。バネを x 伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

仕事を W とすると

$$W = \int_0^x kx \, dx = \left[\frac{k}{2} x^2 \right]_0^x = \frac{k}{2} x^2$$

となる。

演習問題 1.10　速度 V で走っている質量 M の車が等加速度運動 (等減速度運動と言うべきか) して停止した。このとき車を止めるために必要な仕事の量を M と V を用いて表せ。**次は少し難しい問題，$*$ 付きと考えること：** 等加速度運動でない場合に関しても，仕事の量を計算せよ。結果的には前と同じ答えになる。

等加速度 (減速度) 運動で T 秒後に停止したとすると，t 秒後の車の速度 v は $v = V - \dfrac{V}{T} t$ である。加速度 α は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = -\frac{V}{T}$$

である。このとき働いている力 F は $F=-M\alpha$ より $F=\dfrac{MV}{T}$ となる。移動距離 L は

$$L = \int_0^T v\,dt = \int_0^T \left\{V - \frac{V}{T}t\right\} dt = \left[Vt - \frac{V}{2T}t^2\right]_0^T = \frac{VT}{2}$$

となる。よって仕事量 W は

$$W = FL = \frac{MV}{T}\frac{VT}{2} = \frac{1}{2}MV^2$$

となる。

次に等加速度運動ではなく，速度が適当に変化しながら T 秒後に停止したとする。t 秒後の速度を $v(t)$ とする。t 秒後の位置を $\ell=\ell(t)$ とすると，$\dfrac{d\ell}{dt}=v$ が成立している。また T 秒後の位置を L とする。加速度は $\alpha=\dfrac{dv}{dt}$ である。$W=\displaystyle\int_0^L [\,d\ell - M\alpha]$ であるが，変数 t に変数変換し，さらに v に変数変換する。

$$\begin{aligned}
\int_0^L \{-M\alpha\}\,d\ell &= -\int_0^T M\frac{dv}{dt}\frac{d\ell}{dt}\,dt \\
&= -\int_0^T M\frac{dv}{dt}v\,dt \\
&= -\int_V^0 Mv\,dv = \int_0^V Mv\,dv \\
&= \left[\frac{1}{2}Mv^2\right]_0^V = \frac{1}{2}MV^2
\end{aligned}$$

となり，どのように変化しながら停止しても，等加速度運動の場合と等しいことがわかる。

演習問題 1.11　一様な密度の半円板 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 1, y \geqq 0\right\}$ の重心の座標を求めよ。

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 1, y\geqq 0\right\}$ とおき，D の重心を (X_G,Y_G) とすると，半円板は y 軸に関して対称なので $X_G=0$ と考えられる。$D(t)=D\cap\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\infty<x<\infty\right\}$ とおく。$D(t)$ の部分の質量がすべて点 $(0,t)$ にあると考える。$D(t)$ の長さは $2\sqrt{1-t^2}$ なので，y 軸の $0\leqq y\leqq 1$ の部分に置かれている銅線で y 座標が t の点における密度が $\mu(t)=2\sqrt{1-t^2}$ であるような銅線の重心の位置が Y_G になる。質量 K は

$$K = \int_0^1 2\sqrt{1-t^2}\,dx$$

で与えられる。$t=\sin u$ とおいて変数変換を行うと $K=\dfrac{\pi}{2}$ が分かる。またモーメント M は

$$M = \int_0^1 2t\sqrt{1-t^2}\,dx$$

で与えられる。$u=1-t^2$ とおいて変数変換を行うと $M=\dfrac{2}{3}$ となる。重心 Y_G は $Y_GK=M$ となるので，$Y_G=\dfrac{4}{3\pi}$ となる。

演習問題 1.12　一様な密度の材質でできている高さ h の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

円錐の底面の半径を r とする。円錐を，円錐の頂点が原点にあり，底面が y–z 平面に平行で x 軸の正の部分に来るようにおく。円錐と平面 $x=t$ の共通部分の面積は $\dfrac{\pi r^2}{h^2}t^2$ なので前問と同様に考えると，線密度 $\mu(x)=\dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$ の銅線が $0 \leqq x \leqq h$ にあり，その重心が円錐の重心の位置を与えると考えてよい。質量を K とすると，

$$K = \int_0^h \mu(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx = \left[\frac{\pi r^2}{3h^2}x^3\right]_0^h = \frac{\pi}{3}r^2h$$

となる。またモーメント M は

$$M = \int_0^h x\mu(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^3\,dx = \left[\frac{\pi r^2}{4h^2}x^4\right]_0^h = \frac{\pi}{4}r^2h^2$$

となる。よって重心の位置を X_G とすると，$X_GM=K$ なので $X_G=\dfrac{3}{4}h$ となる。底面は $x=h$ にあるので，重心は高さの $\dfrac{1}{4}$ の所にある事が分かる。

演習問題 *1.13　$(x(t),y(t))$ $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ が閉曲線のとき，即ち $(x(t_0),y(t_0))=(x(t_1),y(t_1))$ のとき，この閉曲線で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt$$

である事を示せ。

部分積分法を用いると

$$-\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)\,dt = -\Big[x(t)y(t)\Big]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt$$

となる。ここで $x(t_0)=x(t_1), y(t_0)=y(t_1)$ より $\Big[x(t)y(t)\Big]_{t_0}^{t_1} = x(t_1)y(t_1)-x(t_0)y(t_0)=0$ となるので，$-\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt$ となる。よって

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x'(t)y(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt
\end{aligned}$$

を得る。

演習問題 1.14 $r=f(\theta)=1+\cos\theta$ と極座標表示されている曲線を**心臓形** (*cardioid*) という。これについて次の問に答えよ。

(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[**曲線の概形は解析学 I で学んだ**] $r=f(\theta)$ と極座標表示されている点を x,y 座標で表現した点を $\overrightarrow{\mathrm{x}}(\theta)$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{x}}(\theta)=(x(\theta),y(\theta))$ とする。$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ の関係があるので，$x(\theta)=(1+\cos\theta)\cos\theta, y(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$ となっている。$\cos\theta,\sin\theta$ は周期 2π の周期関数なので，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で曲線を描けばよい。また $(x(2\pi-\theta),y(2\pi-\theta))=(x(\theta),-y(\theta))$ の関係があるので，$0\leqq\theta\leqq\pi$ に対応する部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ に対応する部分は x 軸に関して対称である。よって $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を描いて，x 軸に関して折り返せば，全体の曲線が得られる。

$x'(\theta)=-\sin\theta(1+2\cos\theta), y'(\theta)=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$ となる。$x'(\theta)=0$ のとき $\theta=0,\dfrac{2\pi}{3}$ である。$y'(\theta)=0$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{3},\pi$ である。よって増減表は以下の様になる。

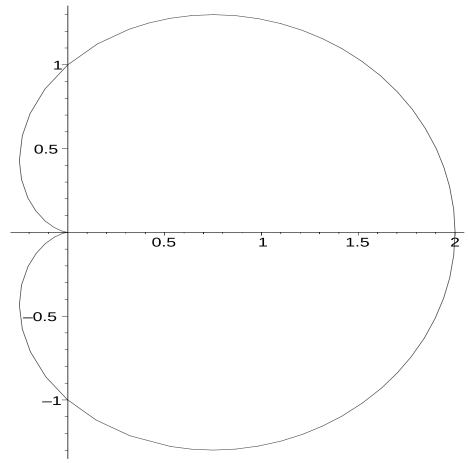
	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	0
曲線	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	

これで概形が分かるが，1 つ問題がある。$\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)=(x'(\theta),y'(\theta))=(0,0)$ となる点を**特異点**と呼ぶが，特異点では $x(\theta),y(\theta)$ が滑らかであっても，曲線が尖る場合がある。そのチェックは解析学 I の講義では触れていない。特異点のまわりも含めきちんと曲線を描く問題は範囲外とするが，ここではそれに関しても述べておく。範囲外という事が分かる様に**青字**で書いておく。

$\theta=\pi$ が特異点を与える。$\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)$ において $\theta\to\pi$ とした時の $\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)$ の方向を見ればよいが，$\theta\to\pi$ としたとき長さが 0 になるので長さを修正し，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)}{|\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)|}$ の方向を考える。$\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)=(x'(\theta),y'(\theta))=(-\sin\theta(1+2\cos\theta),2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)|^2=(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=2(1+\cos\theta)$ となり，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)}{|\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)|}=\left(\frac{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}},\frac{(2\cos\theta-1)\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}\right)$$

が得られる。$\theta\to\pi$ のとき $\dfrac{(2\cos\theta-1)\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}\to 0$ なので $\dfrac{-\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}\to 1$ となる。よって極限では $\overrightarrow{\mathrm{x}}'$ は x 軸と平行になっている。この事を考慮して図を描くと次図の様になる。



(2) $r = f(\theta)$ と表されているときの面積を求める式を用いると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left\{1+2\cos\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right\}d\theta \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。一般のパラメータ表示の面積を求める式を用いてもよい。この場合命題 4.14 を考慮すると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} x(\theta)y'(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\,d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.15　$x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

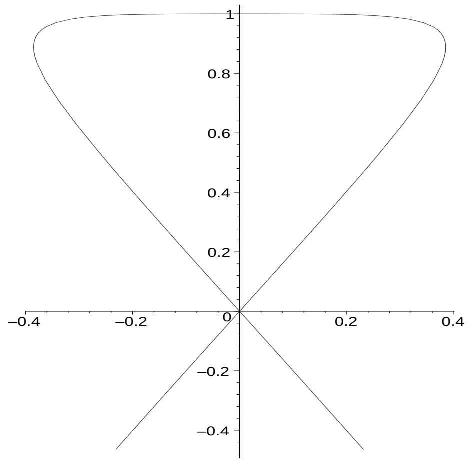
(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $x'(t) = 1 - 3t^2, y'(t) = -4t^3$ なので $t = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x'(t) = 0$，$t = 0$ のとき $y'(t) = 0$ となる。よって増減表は次の様になる。

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

これより曲線を描くと次図の様になる。



(2) 閉曲線になっているのは $t=-1$ から $t=1$ の範囲である。t が -1 から 1 へ動くとき，点 $(x(t),y(t))$ は領域の境界を時計回りに動く。よって求める面積を S とするとき，演習問題 4.14 を考慮すると

$$S = \int_1^{-1}(t-t^3)(-4t^3)\,dt$$

となる。この積分を計算して $S=\dfrac{16}{35}$ を得る。

ここでは点の方向を注意して 1 から -1 までの積分とした。方向に注意せず，例えば

$$\int_{-1}^{1}(t-t^3)(-4t^3)\,dt$$

を計算してもよい。その場合計算結果がマイナスになるので，t が -1 から 1 まで動くとき，点が半時計回り移動している事が分かる。求めた積分値の符号を変えたものが面積になる。

演習問題 1.16　演習問題 1.14 の曲線の長さを求めよ。

演習問題 1.14 で計算している様に

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta) &= (x'(\theta),y'(\theta)) = (-\sin\theta(1+2\cos\theta), 2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\ |\overrightarrow{\mathrm{x}}'(\theta)|^2 &= (x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2 = 2(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

なので曲線の長さを L とすると

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

となる。$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$ なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta = 4\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$

となる。$\cos\dfrac{\theta}{2}$ は負の場合もあるので積分区間が 0 から 2π のときに $\sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ と変形しないように。

演習問題 1.17 極座標表示された曲線 $r = f(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{3}$ の概形を書き，全長を求めよ。

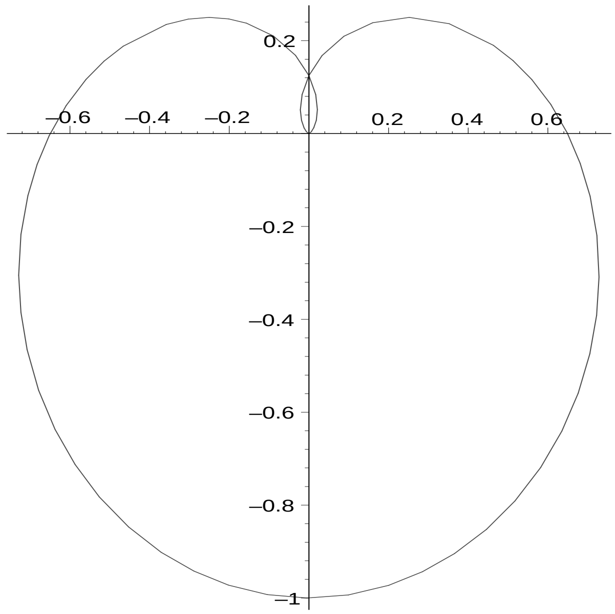
$r = f(\theta)$ と極座標表示されている点を x, y 座標で表現した点を $\overrightarrow{x}(\theta)$ で表し，$\overrightarrow{x}(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ とする。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の関係があるので，$x(\theta) = \sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\cos\theta, y(\theta) = \sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sin\theta$ となっている。$\cos\theta, \sin\theta$ は周期 2π の周期関数なので，$\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$ は周期 6π の周期関数である。また $(x(3\pi+\theta), y(3\pi+\theta)) = (x(\theta), y(\theta))$ の関係があるので，$0 \leqq \theta \leqq 3\pi$ の範囲で曲線を描けばよい。導関数を計算すると

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= 3\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos\theta + \sin^3\frac{\theta}{3}(-\sin\theta) \\ &= \sin^2\frac{\theta}{3}\left\{\cos\frac{\theta}{3}\cos\theta - \sin\frac{\theta}{3}\sin\theta\right\} \\ &= \sin^2\frac{\theta}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\theta\right) = \sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{4\theta}{3} \end{aligned}$$

となる。$y(\theta)$ についても同様に計算すると $y'(\theta) = \sin^2\dfrac{\theta}{3}\sin\dfrac{4\theta}{3}$ となる。$\sin X = 0$ となるのは $X = n\pi$ (n は整数) であり，$\cos X = 0$ となるのは $X = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ (n は整数) なので $x'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \dfrac{3}{8}\pi, \dfrac{9}{8}\pi, \dfrac{15}{8}\pi, \dfrac{21}{8}\pi, 3\pi$ である。$y'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = 0, \dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{9}{4}\pi, 3\pi$ である。よって増減表は次の様になる。

	0		$\frac{3}{8}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{9}{8}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{15}{8}\pi$		$\frac{9}{4}\pi$		$\frac{21}{8}\pi$		3π
x'	0	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	0
x		→		←	←	←		→	→	→		←	←	←		→	
y'	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0
y		↑	↑	↑		↓	↓	↓	0	↑	↑	↑		↓	↓	↓	
曲線		↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	

$\theta = 0$ の点は特異点になるので，演習問題 4.15 と同様に調べる必要がある。この場合は尖った曲線にはならない事が分かる。証明は略すが，興味のあるものは証明を試みよ。増減表より曲線は次図の様になる。



全長を L とすると，

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 \quad = \quad \sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{4\theta}{3} + \sin^4\frac{\theta}{3}\sin^2\frac{4\theta}{3} = \sin^4\frac{\theta}{3}$$

なので

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\,d\theta = \int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta \\ &= \int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 1.18　曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の長さを求めよ。

$\sqrt{x}$ があるので，$x \geqq 0$ が必要である。また，同様に $y \geqq 0$ でもあるので，$\sqrt{x} = 1-\sqrt{y} \leqq 1$ より，$x \leqq 1$ となる。

曲線が $y = f(x)$ と表されているときは $t = x$ と考えると長さ L は

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となる。$\sqrt{y} = 1-\sqrt{x}$ より $y = 1-2\sqrt{x}+x$ となる。よって $\dfrac{dy}{dx} = 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ より $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 =$

$1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}$ となる。よって

$$L=\int_0^1\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}dx$$

となる。$x=t^2$ と変数変換すると $L=2\displaystyle\int_0^1\sqrt{2t^2-2t+1}dt$ となる。更に $u=t-\dfrac{1}{2}$ と変数変換すると，$L=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}du$ となる。よって $L=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ となる。