

演習問題 2.1 次の定積分を定義に基づいて計算せよ。

$$(1) \iint_D xy dx dy \quad (\text{ただし } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\})$$

$$(2) \iint_D x^2 y^2 dx dy \quad (\text{ただし } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\})$$

(1) D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_n\}$ を採用する。ここで $x_i = \frac{2i}{n}, y_j = \frac{2j}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n$) とする。 $z = f(x, y) = xy$ は D において x に関して y に関して単調増加なので、関数 $f(x, y)$ は小領域 $D_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ において (x_i, y_j) で最大値をとり、 (x_{i-1}, y_{j-1}) で最小値をとる。よって

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sup \{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ &= \frac{2i}{n} \frac{2j}{n} = \frac{4ij}{n^2} \\ m_{ij} &= \inf \{f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ &= \frac{2(i-1)}{n} \frac{2(j-1)}{n} = \frac{4(i-1)(j-1)}{n^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ij}{n^2} \frac{1}{n^2} = 4 \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) \\ &= 4 \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\ s(\Delta_n) &= 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(i-1)(j-1)}{n^2} \frac{1}{n^2} = 4 \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n (i-1) \right) \left(\sum_{j=1}^n (j-1) \right) \\ &= 4 \frac{1}{n^4} \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = 1$$

となる。よって

$$\iint_D xy dx dy = 1$$

となる。

(2) D の分割として n 等分割 $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_n\}$ を採用する。ここで $x_i = \frac{i}{n}$, $y_j = \frac{j}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n$) とする。 $z = f(x, y) = x^2y^2$ は D において x に関しても、 y に関しても単調増加なので、

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sup \{ f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \} \\ &= \left(\frac{i}{n} \right)^2 \left(\frac{j}{n} \right)^2 = \frac{i^2 j^2}{n^4} \\ m_{ij} &= \inf \{ f(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j \} \\ &= \left(\frac{(i-1)}{n} \right)^2 \left(\frac{(j-1)}{n} \right)^2 = \frac{(i-1)^2 (j-1)^2}{n^4} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i^2 j^2}{n^4} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^6} \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^6} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2 \\ s(\Delta_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(i-1)^2 (j-1)^2}{n^4} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^6} \left(\sum_{i=1}^n (i-1)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n (j-1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^6} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\Delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\Delta_n) = \frac{1}{9}$$

となる。よって

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{9}$$

となる。

演習問題 2.2 領域 D が $m(D) = 0$ のとき D 上で有界な任意の関数 f に対し

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

が成立することを示せ (定理 2.3 を用いる)。

$M = \sup \{ |f(x, y)| \mid (x, y) \in D \}$ とおくと任意の $(x, y) \in D$ に対し

$$-M \leq f(x, y) \leq M$$

が成立している。積分の単調性より

$$-\iint_D M dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D M dx dy$$

となるのが、

$$\begin{aligned} \iint_D M dx dy &= M \iint_D dx dy \\ &= Mm(D) = 0 \end{aligned}$$

より

$$0 \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq 0$$

が成立する。よって

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

を得る。