解析学II問題解説 #6

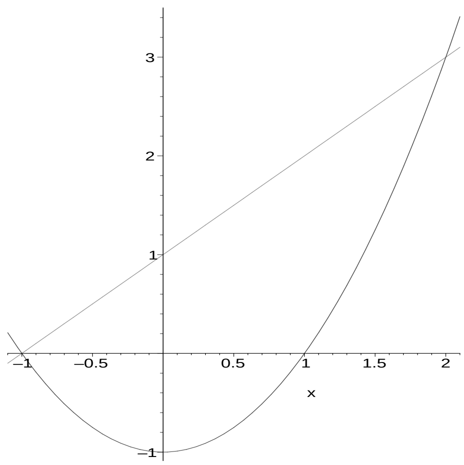
河野

演習問題 2.3　次の重積分について考える。ただし D は $y=x+1$ と $y=x^2-1$ で囲まれる領域とする。

$$I=\iint_D (x+y)dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し，その後 I を求めよ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 D を 2 つの領域 D_1, D_2 に分け，それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表せ。この方法で I を計算せよ。

(1)　$x+1=x^2-1$ を解くと $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$ より $x=-1,2$ となる。2 つの曲線の交点は $(-1,0),(2,3)$ である。領域は次図のようになっている。



(2)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1\leqq x\leqq 2,\ x^2-1\leqq y\leqq x+1\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{2}\left\{\int_{x^2-1}^{x+1}(x+y)\,dy\right\}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2-1}^{x+1}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\left\{x(1+x)-x(x^2-1)+\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x^2-1)^2}{2}\right\}dx \\
&= \frac{99}{20}
\end{aligned}$$

となる。

(3) 横線領域と考えると，$y \geqq 0$ のときは $y-1 \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$ を満たすとき $(x,y) \in D$ となっているし，$y \leqq 0$ のときは $-\sqrt{y+1} \leqq x \leqq \sqrt{y+1}$ を満たすとき $(x,y) \in D$ となっている。よって $y=0$ で 2 つの領域 D_1, D_2 に分ける。$D_1 = \{\,(x,y) \in D \mid y \leqq 0\}$, $D_2 = \{\,(x,y) \in D \mid y \geqq 0\}$ とおくと $D = D_1 \cup D_2$ であり，$m(D_1 \cap D_2) = 0$ となっている。

$$D_1 = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq y \leqq 0,\ -\sqrt{y+1} \leqq x \leqq \sqrt{y+1}\right\}$$
$$D_2 = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq 3,\ y-1 \leqq x \leqq \sqrt{y+1}\right\}$$

なので

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x+y)dxdy + \iint_{D_2} (x+y)dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} \left\{ \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} (x+y)\,dx \right\} dy + \int_{0}^{3} \left\{ \int_{y-1}^{\sqrt{y+1}} (x+y)\,dx \right\} dy \\ &= \frac{99}{20} \end{aligned}$$

となる。

演習問題 2.4　次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x dxdy \qquad D = \{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$　　ただし $a > 0, b > 0$ とする。

(2) $\displaystyle\iint_D \{x+y\}\,dxdy \qquad D = \{x^2 \leqq y \leqq x+2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \left\{2x^2 + 3y^3\right\} dxdy \qquad D = \{x^2 + y^2 \leqq a^2\}$　　ただし $a > 0$ とする。

解説では図をいれてないが，領域を縦線領域または横線領域の形に正しく記述するのに，図を書くことを強く推奨する。

(1)

$$D = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\,\right\}$$

なので

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x dxdy \\ &= \int_0^a \left\{ \int_0^{b(1-x/a)} x\,dy \right\} dx \\ &= \frac{a^2 b}{6} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$D = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq x+2\right\}$$

なので

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{x^2}^{x+2} (x+y)\, dy \right\} dx \\
&= \frac{189}{20}
\end{aligned}
$$

となる。

(3)

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -a \leqq x \leqq a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2} \right\}$$

なので

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (2x^2+3y^3)dxdy \\
&= \int_{-a}^{a} \left\{ \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (2x^2+3y^3)\, dy \right\} dx \\
&= \frac{\pi a^4}{2}
\end{aligned}
$$

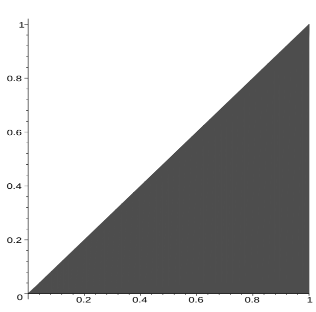
となる。この問題は次の節で扱う変数変換を用いた方が計算が簡単かもしれない。

演習問題 2.5 次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) D をを横線形 ($\{\, (x,y) \,|\, c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。
(4) D を縦線形 ($\{\, (x,y) \,|\, a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。
(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。
(6) I を求めよ。

(1) $0 \leqq y$，$y \leqq x$，$x \leqq 1$ の 3 つの共通部分を求めればよいので次図のようになっている。



(2)

$$D = \{\, 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1 \,\}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-x^2} dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_y^1 e^{-x^2}\, dx \right\} dy \end{aligned}$$

(4)

$$D = \{\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \,\}$$

となる。

(5)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{-x^2} dxdy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2}\, dy \right\} dx \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2}\, dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx \end{aligned}$$

なので $t = -x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -2x$ なので

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-1} -\frac{1}{2} e^t\, dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^t \right]_{t=0}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right) \end{aligned}$$

となる。

この問題の場合，横線領域で計算しても $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ が計算できないため，重積分の値を求めることができない。一方縦線領域で計算すると値が求まる。