

演習問題 2.6 次の重積分を求めよ。

$$(1) I = \iint_D \{x + y\} dx dy \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

$$(2) I = \iint_D \{x^2 + y^2\} dx dy \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(3) I = \iint_D \cos x \cos y dx dy \quad D = \{0 \leq x + y \leq \pi, 0 \leq x - y \leq \pi\}$$

(1) $x^2 + y^2 \leq 2x$ は $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ と変形できるので、領域 D は $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円の内部 (境界を含む) なので、 $x \geq 0$ である。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と極座標に変換する。 $x > 0$ では $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ となるが、 $y > 0$ を保ちながら $x \rightarrow 0$ となるとき $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となる。 $y < 0$ を保ちながら $x \rightarrow 0$ となるとき $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ となる。また $r^2 = x^2 + y^2 \leq 2r \cos \theta$ より $r \leq 2 \cos \theta$ となる。よって $E = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \right\}$ とおくと E と D は面積 0 の部分を除いて

一対一に対応している。また $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。よって

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \{x + y\} dx dy = \iint_E (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2 \cos \theta} (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr \right\} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{8}{3} (\cos \theta + \sin \theta) \cos^3 \theta \right\} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

(2) $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ とおく。 $E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$ とおくと、 E と D は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している ((1) と同様に証明できるのでここでは証明を省

略する：各自試みよ)。また $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = abr$ なので面積 0 の部分を除いてヤコビ

アンは 0 ではない。よって変数変換のための条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \{x^2 + y^2\} dx dy = \iint_E (a^2 r^2 \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \theta) ab r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \theta) ab r dr \right\} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} ab \int_0^{2\pi} \{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta\} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} a^3 b \pi + \frac{1}{4} ab^3 \pi
 \end{aligned}$$

(3) $u = x + y, v = x - y$ とおく。 $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi\}$ とおくと、 E と D

は 1 対 1 に対応している。また $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ なのでヤコビアンが 0 になる事はない。よって変数変換のための条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \cos x \cos y dx dy = \iint_E \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \int_0^\pi \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} du \right\} dv \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^\pi \cos v dv = 0
 \end{aligned}$$

演習問題 2.7 次の広義積分は収束するか。収束しない場合はそれを示し、収束する場合は積分を求めよ。

(1) $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy \quad D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$

(2) $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy \quad D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$

(3) $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy \quad D = \mathbb{R}^2$

(4) $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} dx dy \quad D = \{0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

(1) $A_n = \{0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n - x\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。

$$I_n = \iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy$$

とおく。

$$\begin{aligned}
 I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy \\
 &= \int_0^n \left\{ \int_0^{n-x} \frac{1}{(x+y+1)^2} dy \right\} dx \\
 &= \int_0^n \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{n+1} \right\} dx \\
 &= \log(n+1) - \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

となるので $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ は収束しない。よって広義積分は収束しない。

(2) $A_n = \{0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n-x\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。

$$I_n = \iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy$$

とおく。

$$\begin{aligned}
 I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy \\
 &= \int_0^n \left\{ \int_0^{n-x} \frac{1}{(x+y+1)^3} dy \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^n \left\{ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n^2}{(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

となるので $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$ となる。よって

$$\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^3} dx dy = \frac{1}{2}$$

となる。

(3) $A_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおき、 $E_n = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq n\}$ とおくと E_n と A_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応

している。また $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。

よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned}
 \iint_{A_n} \cos(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{E_n} r \cos r^2 dx dy \\
 &= \int_0^n \left\{ \int_0^{2\pi} r \cos r^2 d\theta \right\} dr \\
 &= 2\pi \int_0^n r \cos r^2 dr \\
 &= \pi \sin n^2
 \end{aligned}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ は収束しないので、広義積分は収束しない。

(4) $A_n = \left\{ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ とおくと $\{A_n\}$ は D の近似増加列になる。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおき、 $E_n = \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{1}{n} \leq r \leq 1 \right\}$ とおくと E_n と A_n は面積 0 の部分を除いて一対一に対応している。また $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので面積 0 を除いてヤコビアンは 0 ではない。よって変数変換の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} dx dy \\ &= \iint_{E_n} \frac{r}{r^{2p}} dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2p}} d\theta \right\} dr \\ &= 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2p} dr \end{aligned}$$

となる。 $p = 1$ のとき $I_n = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{r} dr = 2\pi \log n$ なので広義積分は収束しない。 $p \neq 1$ のとき

$I_n = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 r^{1-2p} dr = \left[\frac{\pi}{1-p} r^{2(p-1)} \right]_{r=\frac{1}{n}}^1 = \frac{\pi}{1-p} (1 - n^{2(p-1)})$ となる。 $p < 1$ のとき収束して $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} dx dy = \frac{\pi}{1-p}$ となる。 $p > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ は収束しない。

演習問題 2.8 次の問に答えながら $I = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$ を求めよ⁽¹⁾。そのために広義積分

$$J = \iint_D \exp(-x^2 - y^2) dx dy \quad D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$$

を計算する。

(1) 自然数 n に対し $A_n = \{0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq n^2\}$ とおく。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と変数変換変換して $J_n = \iint_{A_n} \exp(-x^2 - y^2) dx dy$ を求めよ。

(2) J を求めよ。

(3) 自然数 n に対し $B_n = \{0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$ とおく。 $K_n = \iint_{B_n} \exp(-x^2 - y^2) dx dy$ と

するとき $K_n = \left\{ \int_0^n \exp(-x^2) dx \right\}^2$ が成立する事を示せ。

(4) I を求めよ。

⁽¹⁾ $\exp f(x) = e^{f(x)}$ である。肩に乗っている指数が見にくい場合はこの様な記法も使う。

(1) $E_n = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq n \right\}$ とおくと $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の対応で E_n と A_n は面積

0 を除いて一対一に対応している。ヤコビアンは $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ なので

$$\begin{aligned} J_n &= \iint_{A_n} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \\ &= \iint_{E_n} r \exp(-r^2) dx dy \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \exp(-r^2) d\theta \right\} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^n r \exp(-r^2) dr \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - \exp(-n^2)) \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} J &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - \exp(-n^2)) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} K_n &= \iint_{B_n} \exp(-x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^n \exp(-x^2 - y^2) dy \right\} dx \\ &= \int_0^n \left\{ \int_0^n \exp(-x^2) \exp(-y^2) dy \right\} dx \\ &= \int_0^n \left\{ \exp(-x^2) \int_0^n \exp(-y^2) dy \right\} dx \\ &= \int_0^n \exp(-y^2) dy \int_0^n \exp(-x^2) dx \\ &= \int_0^n \exp(-x^2) dx \int_0^n \exp(-x^2) dx \\ &= \left\{ \int_0^n \exp(-x^2) dx \right\}^2 \end{aligned}$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^n \exp(-x^2) dx \right\}^2 \\ &= \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \exp(-x^2) dx \right\}^2 \\ &= \left\{ \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \right\}^2 \\ &= I^2\end{aligned}$$

となるので

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となる。