

0 Introduction

テキストより理論的に深い事を知りたい人には参考書として次をあげておく。

高木貞治 『解析概論』 (岩波書店)

小平邦彦 『解析入門』 (岩波書店)

微積分は自然科学などを通して、大きな役割を果たしてきたし、現在も果している。この講義では、1 年後期、2 年前期 (解析学 II) にわたってその微積分学を学習して行く。

理工系の学生にとっての微積分の役割は明らかであろうが、一言ふれておく。近代科学の父とも言われるガリレオ・ガリレイは「偽金鑑識官」の中で

「自然という書物は数学という言葉で書かれている。自然を学ぶためには数学を学ぶ必要がある」と書いている。理工系、特に工学系の学生にとっては例えばスパナを道具として自在に扱えるように、数学も自在に道具として扱えることが技術者としての力量を深いものするといえる。

微積分は高校でも学び、前期も序論で扱った。そうなるこの授業は、復習をする、ないしは応用的なことをするということなのであろうか。実はそうではない。前期の序論では意識的に高校数学との違いを強調してこなかったが、理論も含めてきちんと議論をしようとするると 2 つの点で違いが明らかになる。1 つは、扱う関数として多変数関数 (独立変数が 2 つ以上ある関数) が登場することである。解析学 I では 2 章で多変数関数の微分を扱うし、解析学 II では多変数関数の積分が登場する。

2 つ目は質的側面 (理論構成の厳密さ … 極限概念と実数概念) である。後者については少し説明が必要だと思われる。微積分の歴史にもふれながら、それを説明して全体の講義のイントロにしたい。

微積分学は 17 世紀の後半にニュートン (1642–1727) とライプニツ (1646–1716) によって独立に始められた。先主権争いなどもあったが今では独立に (お互に相手の仕事を知らないで) 考えたとされている。源流は 2 つあり、1 つは古代ギリシア以来の『求積法』 (面積・体積などを求める方法)、もう 1 つは近代になって考えられ始めた『接線法』と呼ばれたものである。いずれも、所謂「無限概念」に関係するもので、その当時から、色々な批判があった。それは、その当時の人が数学 (数学だけでなく諸科学・諸文化) の理想と考えた古代ギリシアの厳密な取り扱いに比べて、曖昧 (或る人にとっては「いいかげん」) に感じられたのであろう。ここでは極限概念に対するパークレイの批判を紹介する。

$y = f(x) = x^2$ の導関数を求めてみよう。(物理の場合の問題だと、 x 秒後の物体の位置が x^2 で表わされる時、 x 秒後の速度は?) 導関数の定義に従って計算すると次の様になる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

よって $y = f(x) = x^2$ の導関数は $y = f'(x) = 2x$ となる。

これに対するバークレイの批判は以下の様である：数（実数）は 0 であるかないかのいずれかである。だから h も 0 であるかないかのいずれかである。最初に $h \neq 0$ としよう。この時最後の等式は成立しない。次に $h = 0$ としよう。この時は途中で 0 で割算をしている。いずれにせよ矛盾を含む議論をしている。

これに対しニュートンを初めとして、確かに色々な説明をしている。しかし、本質的には答える事が出来なかった。それは極限概念が直観に依存する形で展開され、数学的に厳密とは言い難かった事に原因を求める事ができるかもしれない。しかし、微積分学は、惑星の運動法則の解明をはじめとして、多くの事に解答を与えた。微積分学は基礎は曖昧であったが捨て去るには強力で魅力的だった。ダランベールの「前進しよう。信念は後から湧いてくる。」という言葉がその様子を表わしている。

17,18 世紀を通じて微積分学そしてニュートン力学は大きな成功をおさめる。例えば、惑星の存在の予想など。「微分方程式を用いて運動の将来を厳密に予測できる。」という立場は例えば、ラプラスによる『ラプラスの魔』の考えを生み出したり、哲学に持込まれ、機械論的決定論を生み出す。

19 世紀の 20-30 年代にコーシー (1789-1857) により『解析教程』のなかで、極限の数学的にも厳密な定義が提出される。現在 ε - δ 論法と呼ばれている。大学の講義の中に微積分学入って来るのと同じ時期という事は注意する必要がある。

微積分学の理論構築のためには、もう 1 つ問題がのこっていた。それは「実数とは何か」という問題である。そんなのは分かっているというかもしれないが、高校まででは「これこれのものが実数である」というきちんとした定義はやっていない（無限小数も理論的にはキッチリはやってない）。例として、次の問題を考えてみる。

【問題】 $\sqrt{2}$ は存在するか。すなわち $x^2 = 2, x > 0$ となる実数は存在するか。

最初に平方根を学んだ時、「 $x^2 = 2, x > 0$ となる数を $\sqrt{2}$ と呼ぶ。」としたはず。しかし、そのような数が、実数のなかに存在しなければ、定義は意味がない。例えば、 $x^2 = -1$ となる実数は存在しない。だから「 $x^2 = -1$ となる実数を i と呼ぶ。」と定義しても意味はない。「定義」した事で存在するつもりになってはいけない。定義する前に存在を確かめなくてはならない。

「微積分学の基本定理」とよばれている定理が在るが（解析学 II で扱う）、それを示すには「平均値の定理」を必要とする。これを示すには「ロルの定理」、そのためには「最大値定理」と遡って行く事ができるが、最後（最初のというべきか）の最大値定理をうまく証明できない。明確な証明のためには「実数とは何か」の解明が必要という事が自覚されてくる。

そうした中、この問題（実数論）は 19 世紀後半に何人かの人によって独立に展開された。カントール (1845-1918)、デデキント (1831-1916)、ワイエルシュトラス (1815-1897) などがその人達である。

微積分は基礎の厳密さが確定する前に理論自身が発展するという形をとった。その原因として、「無限概念」に関係した数学理論だという点があげられる。

このようにして発展してきた微積分だが、実際講義する方法としてはいくつかの立場が考えられる。

- (1) きちんと厳密に議論を進める。
- (2) 理論的問題について説明はするが、それほど厳密に議論はすすめない。
- (3) そのような問題には一切ふれない（さわらぬ神にたたりなし）。

高校までの数学は、実は (3) の立場でやられていた。この講義では (2) の立場をとることにする。