

## 1 1 変数関数の微分

### 1.1 実数の基本性質

この節と次の節の内容は完全に理解する事を要求はしない。しかし、微積分を理論的に支えている基礎に「実数論・極限論」がある事は理解しておいてほしい。

$0.9999999999999999 \dots = 1$  という例などでもわかるように実数をきちんと捉えらえる事は中々難しい。どこかに「無限」というものが顔を出す。数学でも実数の概念が「数学的に」明確になったのは(古代ギリシアは除いて)19世紀の半ば以降の事である。

$0.9999999999999999 \dots = 1$  に関して考えよう。

$$1 \div 3 = 0.\dot{3} = 0.3333333333333333 \dots$$

なので、 $(1 \div 3) \times 3 = 1$  より

$$1 = 0.3333333333333333 \dots \times 3 = 0.9999999999999999 \dots$$

が「分かる」。

もう少し無限小数について議論しよう。実数に対し無限小数表示というものが考えられる。例えば  $\alpha = \sqrt{2}$  を考えてみよう。 $\sqrt{2}$  は  $\alpha^2 = 2, \alpha > 0$  を満たす実数として定義された。 $1^2 = 1 < 2 = (\sqrt{2})^2 < 4 = 2^2$  という関係から

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

が分かる。また  $1.4^2 = 1.96 < 2 = (\sqrt{2})^2 < 2.25 = 1.5^2$  という関係から

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

が分かる。また  $1.41^2 = 1.993881 < 2 = (\sqrt{2})^2 < 2.0164 = 1.42^2$  という関係から

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

が分かる。

これを続けていくと、 $1.41421356 \dots$  というような表示が得られる。「得られる」と書いたが、ここは少し考える必要がある。有限桁でいいなら表示は得られるだろう。しかし、それは  $\sqrt{2}$  ではない。 $\sqrt{2}$  は有理数でないことが知られており、このことを小数の言葉でいうと、「 $\sqrt{2}$  は有限少数でも、循環少数でも表すことはできない」となる。 $\sqrt{2}$  の少数表示のすべての桁を決定することはできない。それでは  $\sqrt{2}$  が存在すると主張できるのだろうか。それを主張するために、次のように考える。「無限小数表示ですでに無限個の数字決定されそれが並んでいる。」この立場に立つと、実際的には小数点以下すべての数を具体的に決定する事は難しいかもしれないが、 $\sqrt{2}$  は確定していて、我々は必要な桁数の数字を決定することができることになる。これが我々が通常実数に対してとっている立場である。

しかしこれだけでは、理論を展開するのに不十分である。ここで逆を考えてみよう。「無限小数は必ず一つの実数を表すのか？」という疑問である。この疑問への肯定的解答が「実数の連続性」と呼ばれる性質であり、通常この事実の成立を仮定するのが我々の立場である。

「実数の連続性」を認める事にして最初に例として挙げた  $0.\dot{9} = 1$  を「証明」してみよう。今これは無限小数であるから或る実数を表している。これを  $\alpha$  とおく事にしよう。 $\alpha$  が 1 以下である事は認めてもよいであろう。さて  $\alpha$  が 1 より小さいとしてみる。この時  $0.9, 0.99, 0.999, \dots$  と考えていくといつかは  $\alpha$  を越える。つまり, ある  $n$  が存在して  $1 - \alpha > \frac{1}{10^n}$  となる。このとき

$$\alpha < \underbrace{0.9 \cdots 9}_{n \text{ 個}} < 0.\dot{9} = \alpha$$

なので矛盾。よって  $\alpha = 1$  である。

この議論は「無限小数とは何か」ということをきちんと定義していないので「数学的」とは言えないが感じはつかめるかもしれない。この事をきちんと定義すれば実数の連続性を定義できる。しかし通常は別の公理を採用して議論する。「実数の連続性」のきちんとした定義の前に, 実数の基本性質を整理しておこう。

(1) 演算 : 実数には和 (+) と積 ( $\cdot$ ) という演算が定義されている

1) 和の基本性質

1.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$  (結合法則)。
2.  $\exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = 0 + a = a$  (零の存在)。
3.  $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists a' \in \mathbb{R} \quad a + a' = a' + a = 0$   
この  $a'$  を  $-a$  と書く (加法の逆元の存在)。
4.  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$  (交換法則)。

2) 積の基本性質

1.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (結合法則)。
2.  $\exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  (単位元の存在)。
3.  $\forall a (\neq 0) \in \mathbb{R} \quad \exists a'' \in \mathbb{R} \quad a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$   
この  $a''$  を  $1/a$  と書く (乗法の逆元の存在)。
4.  $a \cdot b = b \cdot a$  (交換法則)。

3) 和と積の関係

1.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (分配法則)。

(2) 順序 : 実数には順序関係 ( $\leq$ ) が定義されている。

1) 順序の基本性質

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  に対し  $a \leq b$  または  $b \leq a$  が成立する。
2.  $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$
3.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$
4.  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b, b \leq a \implies a = b$

2) 和・積との関係

1.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \implies a + c \leq b + c$
2.  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \geq 0, b \geq 0 \implies a \cdot b \geq 0$

(3) 連続性 … この性質が有理数と実数を区別するものになっている。色々な人が別々に実数の基礎付けを試みたので幾つか違った定義が有る。ここでは同値な公理をあげておく。

- 任意の無限小数表示に対しそれで表現される実数が存在する。
- 空集合でない上に有界な実数の部分集合は最小上界 (上限) を持つ (ワイエルシュトラスの公理)。  $A \subseteq \mathbb{R}$  とする。「 $\exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in A \ x \leq \alpha$ 」が成立するとき、 $A$  は上に有界であるといい、 $\alpha$  を  $A$  の上界という。 $A$  の上界の中に最小の実数が存在するとき、その実数を  $A$  の最小上界または上限という。
- 閉区間  $I_n = [a_n, b_n]$  ( $n = 1, \dots$ ) がすべての  $n$  に対し  $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$  を満たすとき、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$  である (カントールの公理)。
- 実数全体を空でない2つの部分集合  $A, B$  に分け、 $A$  の任意の元は  $B$  の任意の元より小さいとき、 $A$  に最大元があるか  $B$  に最小元があるかのいずれかが起こる (デデキントの公理)。

## 1.2 極限概念

まず「数列の極限」について考える。高校時代は『 $n$  が限りなく大きくなる時、 $a_n$  は限りなく  $A$  に近づく。』とき、数列  $a_n$  は  $A$  に収束するといい、この  $A$  を極限值と呼んでいた。しかしこの直観的定義はよく考えると分らない。この定義が数学的に明確なものならその対偶をとっても同値なはずである。同値な命題は『 $a_n$  が限りなく  $A$  に近づくかない時、 $n$  は限りなく大きくならない。』となるがこれは明確であろうか。イントロでも触れたが微積分は始った時にはその理論的基礎付けは十分明確ではなかった。この極限概念に関しても特に 18 世紀には混乱が起こった。1 例として  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  という級数を考えてみよう。幾つかの考え方を紹介しよう。

$$(1) \alpha = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \text{ より, } \alpha = 0$$

$$(2) \alpha = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \text{ より, } \alpha = 1$$

$$(3) \alpha = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - \alpha \text{ より, } \alpha = 1/2$$

以上の議論により、 $0 = 1 = 1/2$

この様ななかで極限概念を明確にしたのはコーシー (Cauchy) であった。彼は概ね以下の様に考えた。『限りなく近づく』という概念は『距離を幾らでも小さくできる』事、もう少し数学的にはっきりさせると『与えられたどんな正の数より距離を小さくできる』事と考えた。

そして『限りなく大きくなる』という概念は『 $n$  をいくらでも大きくする』事、もう少し数学的にはっきりさせると『或る大きな自然数よりも大きくする』事と考えた。

定義 1.1 以上から数列  $a_n$  が  $A$  に収束するとは

任意の正の実数  $\varepsilon$  に対しある自然数  $N$  が存在して  $N$  より大きい任意の自然数  $n$  に対し  $n > N$  ならば  $|a_n - A| < \varepsilon$  が成立する。

前期に学んだ論理記号を用いると

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \implies |a_n - A| < \varepsilon$$

とコーシーは定義した。我々も厳密に取り扱う時にはこれを採用する。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{または} \\ a_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$$

と表す。

言い方を変えると次の様にも言える。「任意の正数  $\varepsilon$  に対して  $a_n$  と  $A$  との距離が  $\varepsilon$  以上である  $n$  は有限個しかない。」

次の定理は当たり前に見えるかもしれないが極限の定義を厳密にする事なしに「証明」できなかったということは注意する必要がある。

定理 1.2 [極限の性質]

(1) 和・定数倍・積・商の極限

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n &= k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ 3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ 4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{ の時, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \end{aligned}$$

(2) 不等式  $a_n \leq b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の時,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(3) はさみうちの定理  $a_n \leq b_n \leq c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の時  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$  であれば  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  も収束して極限值は  $A$ 。

演習問題 \*1.1 定理 1.2 を証明せよ (これらは数学序論でも星印付き演習問題とした)。

数列の収束では次の定理が理論的にも実際的にも重要である。数列  $\{a_n\}$  が上に有界とは「 $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq M$ 」と定義し,  $\{a_n\}$  が単調増加数列であるとは「 $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \geq a_n$ 」と定義する。

定理 1.3 上に有界な単調増加数列は収束する。

演習問題 \*1.2 定理 1.3 を証明せよ

理論的な面でいうとこの定理は「実数の連続性」と同値である。この定理の実際上での良い点は「収束するかどうか」という事と「極限値を求める事」を分けられる点である。難しい形の数列の極限を求める場合, 2 つを分けて考える事が有効な場合がある。

例を考えよう。  $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$  (この様な式は漸化式と呼ばれる) と帰納的に定義される数列を考える。この数列は上に有界であり, 単調増加数列である (演習問題 1.3 参照)。定理 1.3 よりこの数列は収束するので極限値を  $\alpha$  とする。漸化式において  $n \rightarrow \infty$  とすると  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} a_n + 1 \right), \text{ 即ち } \alpha = \frac{1}{2} \alpha + 1 \text{ より } \alpha = 2 \text{ となる。}$$

高校時代に、収束性を調べることなしにこのような議論をした人もいるかもしれない。しかし、 $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$  という例から分かるように収束性抜きにこのような議論はできない (演習問題 1.4 参照)。

演習問題 1.3 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$  で帰納的に定義される数列とする。

- (1) 任意の自然数  $n$  に対し  $a_{n+1} - a_n \geq 0$  が成立することを数学的帰納法で示せ。
- (2) 任意の自然数  $n$  に対し  $a_n \leq 2$  が成立することを示せ。

演習問題 1.4 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$  で帰納的に定義される数列とするとき、 $a_n = 1 - 2^{n-1}$  が成立することを示せ。

演習問題 1.5 数列  $\{a_n\}$  が下に有界とは「 $\exists N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq N$ 」と定義し、 $\{a_n\}$  が単調減少数列であるとは「 $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \leq a_n$ 」と定義する。定理 1.3 を用いて「下に有界な単調減少数列は収束する」ことを証明せよ。

次に「関数の極限」を考えよう。直観的には「 $f(x)$  において  $x$  を限りなく  $a$  に近づける時  $f(x)$  は  $A$  に限りなく近づく」事だが、これもコーシーによって以下の様に考えられ定義された。『限りなく近づく』という概念は数列の場合と同じ様に『与えられたどんな正の数より距離を小さくできる』事と考えた。

また『限りなく近づける』という概念は『距離を小さくする』事、もう少し数学的にはっきりさせると『距離をある値より小さくする』事と考えた。

定義 1.4 以上から関数  $f(x)$  において  $x$  を限りなく  $a$  に近づけた時  $A$  に収束するとは

任意の正の実数  $\varepsilon$  に対しある正の実数  $\delta$  が存在して  $0 < |x - a| < \delta$  となる任意の実数  $x$  に対し  $|f(x) - A| < \varepsilon$  が成立する。

前期に学んだ論理記号を用いると

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

とコーシーは定義した。我々も厳密に取り扱う時にはこれを採用する。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{または}$$

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a)$$

と表す。

$x \rightarrow \infty$  も同様に定義している。

任意の正の実数  $\varepsilon$  に対しある実数  $L$  が存在して  $L$  より大きい任意の実数  $x$  に対し  $|f(x) - A| < \varepsilon$  が成立する。

前期に学んだ論理記号を用いると

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \ L < x \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

このとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{または}$$

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

と表す。

この論法を  $\varepsilon - \delta$  論法という。

数列の極限に関する定理 1.2 と同様に関数に対しても次を示す事ができる。

定理 1.5 (1) 和・定数倍・積・商の極限

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{ の時, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$(2) \text{ 不等式 } f(x) \leq g(x) \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{) の時, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(3) はさみうちの定理  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の時  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$  であれば  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  も収束して極限值は  $A$ 。

演習問題 \*1.6 定理 1.5 を証明せよ (これらは数学序論でも星印付き演習問題とした)。

ここでイントロのとき紹介した微積分学に対するパークレーの批判に対し、 $\varepsilon - \delta$  論法の立場で答えておこう。 $y = f(x) = x^2$  の導関数を求める事に対する批判であった。 $F = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$  において  $h$  で割算して  $F = 2x + h$  としておきながら、 $\lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$  とするのはおかしいとの批判であった。

コーシーの立場からは次の様な議論になる。任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  を適当に見つけなくてはならないが、今  $\delta = \varepsilon$  としよう。このとき  $0 < |h| < \delta$  となる任意の  $h$  に対し  $|F - 2x| = |h| < \delta = \varepsilon$  となるので、定義より  $\lim_{h \rightarrow 0} F = 2x$  となる。この立場では  $h = 0$  となる事はない。

肩透かしの様な回答に感じるかもしれない。しかし極限における「等号」がきちんと定義されているのがこの議論のよい点であろう。パークレーの議論ではきちんと定義されていない極限における「等号」を通常の「等号」と同じように扱っていた。