解析学 I 要綱 #3

1.3 連続関数

「関数 (函数)」という概念は微積分学というドラマの主人公ともいえるものである。江戸時代日本に「和算」と呼ばれた「数学」があり微積分と似たような事をやっていた。しかしその後の発展には結びつかなかった。私見ではあるが，和算の 2 大弱点として「『生産』と結び付かない」 所謂「芸事」であった事に加え，理論的には「『関数概念』がなかった」事が挙げられる。

「関数」は前期に学んだが，歴史的に変化 (発展) しており現代的立場と古典的立場がある。古典的な立場は「解析的な式で表されているものが関数である。」とするもので現代的立場はそれに拘らず「対応」ということを前面に出す。ここでは現代的定義をもう一度与えるが，実際の講義の中では古典的立場が所々で顔を出すかもしれない。

定義 1.6 2 つの数の集合 X，Y に対し X の各元 x に対し Y の元 y を対応させる規則 f が与えられている時 f を X から Y への関数といい，

$$f : X \longrightarrow Y$$

と書く。元 x に元 y が対応している時 $y = f(x)$ と表す。X を定義域 (始域)，Y を終域，$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ を値域という。

現代的立場では厳密には関数 f と元 x における関数の値 $f(x)$ は区別する。例えば 2 次関数をそれぞれの立場でいうと，古典的立場でいうと，式 $y = f(x) = x^2$ が与えられたら関数が定まったと考える。しかし現代的には対応であるから定義域，終域を決めなくてはならない。例えば $X = \mathbb{R}$(定義域)，$Y = \mathbb{R}$(終域) とし，x に対し x^2 を対応させる規則を f とする。この立場では (厳密には) 終域を $Y' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ としたものは前とは違う関数になる。混乱のおそれがない場合には，この取扱いはいかにも片苦しい。講義では現代的定義を採用するが，誤解の恐れのないときは古典的取り扱いもする。

定義 1.7 2 つの関数 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ に対し関数 $h : X \longrightarrow Z$ で $h(x) = g(f(x))$ となるものが存在する。この関数 h を f と g の合成関数といい $h = g \circ f$ と表す。

関数 $f : X \longrightarrow Y$ が全単射である時，$y = f(x)$ とするとき，y に対し x を対応させる写像が考えられる。これを f の逆関数といい f^{-1} で表す。

関数の中でも「連続関数」は解析学おいて重要である。直感的にはグラフがつながっているという感じだが，定義は極限に基づいてされるのでグラフが書けそうもないものもある。

定義 1.8 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ をある区間 I で定義された関数とする。

(1) $a \in I$ に対し $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立する時関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続という。ただし閉区間の右 (左) 端の点の極限は左 (右) 極限を意味するものとする。

(2) I の任意の点で連続の時 f は I で連続という。

定義の (1) は $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$ と書き直すと，極限をとるという操作と関数で写すという操作の順序を入れ換える事ができることを意味する。このようなとき 2 つの操作は可換であるという。連続関数の幾つかの性質を紹介する。これはそれぞれ大事な性質である。

定理 1.9 [**最大値の定理**] 閉区間で定義された連続関数は最大値をとる。

定理 1.10 [**中間値の定理**] 連続関数は中間値をとる。即ち，閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が $f(a) < f(b)$ を満たしているとする。$f(a) < \alpha < f(b)$ となる任意の α に対しある c $(a < c < b)$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる。

定理 1.11 [**逆関数の定理**] 単調で連続な関数に対して逆関数が存在して，その逆関数も連続関数になる。

最大値定理は「実数の連続性」から導かれる。そして最大値定理を用いて「微積分の基本定理」が証明される。上であげた定理はいずれもきちんと証明するためには，基礎理論からきちんと議論する必要がある。興味がある人のために星印付きの演習問題とする。

演習問題 ***1.7**　定理 1.9，1.10，1.11 を証明せよ。

1.4　導関数

関数 f の導関数 f' は (存在する場合) 次の式で定義されるものであった。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x においてこの極限が存在するとき，f は x で**微分可能** (*differentiable*) であるという。定義域の各点で微分可能であるとき，関数 f は**微分可能** (*differentiable*) であるという。ただし f の定義域が閉区間 I のとき区間の左端の点 a で微分可能とは次の右極限が存在する場合をいう事とする。

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{h\to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

右端の点の場合は次の左極限の存在する場合をいう。

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{h\to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

演習問題 1.8　微分可能な関数は連続であることを示せ。また連続であるが微分可能でない関数の例をあげよ。

前期すでに学んでいる部分もあるので，ここでは「微分 $=$ 線型近似 (1 次近似)」見方に関してのみ説明しておく。f は微分可能とする。今 $x = a + h$ とし，a のまわりの関数の様子を考える。$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = \varepsilon$ とおくと $h \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ となる。つまり

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon h$$

において h が非常に小さいとき，εh は (**非常に**)^2 小さいと考えられる。この項を無視した残りの項は h の 1 次式になるが，これが $f(x)$ を近似しているので，**線型近似**と呼ばれる。

逆に微分可能な関数 $f(x)=f(a+h)$ を h に関する 1 次式 $A+Bh$ で「近似」する事を考える。直線と関数の差を

$$d(h)=f(a+h)-(A+Bh)$$

とおく。「近似」と呼ぶには $d(0)=0$ は必要であろう。このとき $d(0)=f(a)-A$ なので $A=f(a)$ となる。「近似がよい」ことを「$d(h)$ が小さいこと」と考える。$\varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h}$ とおくとき，$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ となるとき $d(h)$ は (**非常に**)^2 小さいと考えられるので，これを「近似がよい」ことの定義として採用する。このとき

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-(f(a)+Bh)}{h}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-B$$

となるので $B=f'(a)$ のとき $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ となる。よって一番近似のよいのは $f(a)+f'(a)h$，即ち接線であることが分かる。

以上のことから「微分」,「(1 次) 近似」,「接線」は三位一体の関係にあると言える。このことを次の図で表しておこう。

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{微分}} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \boxed{\text{近似}} \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& \boxed{\text{接線}} &
\end{tikzcd}$$

次に $f(x)=f(a+h)$ を h に関する 2 次式 $A+Bh+Ch^2$ で近似することを考える。$d(h)=f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)$ に対し $\varepsilon(h)=\dfrac{d(h)}{h^2}$ とおくとき $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ を「近似が一番よい 2 次式」と定義する。このとき $d(h)=\varepsilon(h)h^2$ なので $d(0)=0$ としてよい。よって $d(0)=f(a)-A=0$ より $A=f(a)$ となる。$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{d(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)h=0$ なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{d(h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+Bh+Ch^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-B-Ch\right)\\
&= f'(a)-B
\end{aligned}$$

となるので $f'(a)=B$ が分かる。また

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-(f(a)+f'(a)h+Ch^2)}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)-2Ch}{2h} && \text{(ロピタルの定理を使用)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a)-2C}{2}
\end{aligned}$$

となるので $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ より $C=\dfrac{f''(a)}{2}$ となる。よって近似の一番よい 2 次式は

$$f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2$$

となる。

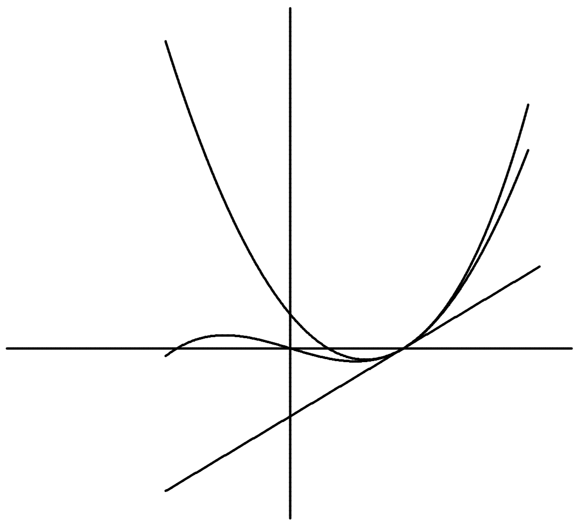
この 1 次近似，2 次近似を多項式の場合を例に幾何学 (図形) 的に見てみよう。$y = f(x) = x^3 - x$ とする。これを $x = 1$ で近似することを考える。定義に基づいて導関数を求めて計算できるが，ここでは多項式という性質を用いて計算する。$h = x - 1$ とする。$x = 1 + (x-1) = 1 + h$ なのでこれを $f(x)$ に代入すると，

$$f(x) = (1+h)^3 - (1+h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1 - h = 2h + 3h^2 + h^3$$

となる。多項式の場合，h による展開で 2 次以上の項をカットして得られる 1 次式が近似のよい 1 次式になっている。また h による展開で 3 次以上の項をカットして得られる 2 次式が近似のよい 2 次式になっている。この場合それは

$$2h = 2(x-1) = 2x - 2$$
$$2h + 3h^2 = 2(x-1) + 3(x-1)^2 = 3x^2 - 4x + 1$$

である。$x = 1$ の近くでは直線も 1 次式も勿論よい近似を与えているが，2 次式は曲がりぐあいも含めてよく表現していることが分かる。



演習問題 1.9　近似の一番よい 3 次式を求めよ。ここで近似の一番よい 3 次式 $g(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3$ とは $d(h) = f(a+h) - g(h)$ に対し $\varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^3}$ とおくとき $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するものをいう。関数は何回でも微分できることを仮定する。

演習問題 1.10　次の関数 $y = f(x)$ を $x = a$ で一番良く近似する 1 次式，2 次式，3 次式を求めよ。

(1) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$　(a=0)　　(2) $f(x) = e^x$　$(a = 1)$

(3) $f(x) = (x+1)^5$　$(a = 0)$

ここで前期に学んだ定理について結果のみ記しておく。理解があやふやな人は復習しておくこと。

定理 1.12 関数 f, g は微分可能とし，a は定数とする。
(1) $(f+g)' = f' + g'$
(2) $(af)' = af'$
(3) $(fg)' = f'g + fg'$ 　(**積の微分法**)

定理 1.13 [**合成関数の微分法**] 　関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ が共に微分可能で合成関数 $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ が定義されるとき

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

定理 1.14 [**逆関数の微分法**] 　ある区間 I または実数全体で定義された関数 f が微分可能かつ単調であるとき，逆関数は微分可能で導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

定理 1.15

(1) $\bigl(x^n\bigr)' = nx^{n-1}$
(2) $\bigl(e^x\bigr)' = e^x$
(3) $\bigl(a^x\bigr)' = a^x \log a$
(4) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$
(5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$
(6) $(\sin x)' = \cos x$
(7) $(\cos x)' = -\sin x$
(8) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
(9) $\bigl(\arcsin x\bigr)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(10) $\bigl(\arccos x\bigr)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(11) $\bigl(\arctan x\bigr)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

微積分の計算は数学序論ですでにやっているので，演習問題は用意しなかった。微分の計算がよくわからないという人は数学序論の微分の計算部分の演習問題をもう一度やってみる事。