解析学 I 要綱 #4

1.5 平均値の定理

この節で取り上げる平均値の定理は微積分学全体の中でもキーポイントとなる重要な定理である。「或る区間で $f'(x) > 0$ ならはそこで単調増加」という命題もこの定理から導かれる

定理 1.16 [**平均値の定理**] 関数 f は閉区間 $[\,a,\, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a,\, b\,)$ で微分可能とする。このとき $a < c < b$ を満たす c が存在して

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成立する。

この定理を示すために次の定理を用いる。

定理 1.17 [**Rolle(ロル) の定理**] 関数 f は閉区間 $[\,a,\, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a,\, b\,)$ で微分可能とする。$f(a) = f(b)$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して $f'(c) = 0$ が成立する。

証明 最大値定理より最大値を与える c が存在する。今 $a < c < b$ を仮定する。c は最大値を与えるので任意の h に対し $c + h$ が区間 $[\,a,\, b\,]$ に入っていれば $f(c+h) \leqq f(c)$ が成立する。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$ なので $\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0$ が成立する。また $h < 0$ のとき $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$ なので
$\displaystyle\lim_{h\to+0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$ が成立する。よって $f'(c) \geqq 0$ かつ $f'(c) \leqq 0$ が成立するので，$f'(c) = 0$ である。

途中 $a < c < b$ を仮定したが，これが成立しない場合 $f(a) = f(b)$ が最大値となっている。f が定数関数の場合は定理は成立しているので定数関数でないと仮定する。このときは前述の議論を最小値に関して行えばよい。 ∎

この定理から平均値の定理が示されるが，ここでは平均値の定理を一般化した次の定理を示す。

定理 1.18 [**Cauchy(コーシー) の平均値定理**] 関数 f, g は閉区間 $[\,a,\, b\,]$ で連続，開区間 $(\,a,\, b\,)$ で微分可能とする。$(\,a,\, b\,)$ で $g'(x) \neq 0$ ならば $a < c < b$ をみたす c が存在して

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成立する。

証明 天下りではあるが $F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$ とおく。この関数 F は $[\,a,\, b\,]$ で連続，(a, b) で微分可能である。また $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ が成立する。よって Rolle の定理より c $(a < c < b)$ が存在して $F'(c) = 0$ が成立する。$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$ なので $F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$ が成立する。ここで $g'(x) \neq 0$ なので $g(b) - g(a) = 0$ なら Rolle の定理に矛盾するので，$g(b) - g(a) \neq 0$ がとなる。よって割り算を実行すれば定理が得られる。 ∎

定理 1.18 において $g(x)=x$ とおくと平均値の定理が示される。ここで平均値の定理を少し拡張した形で書き直しておこう。$b=a+h$ とし，$\theta=\dfrac{c-a}{h}$ とおくと平均値の定理は

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h \qquad (0<\theta<1)$$

となる θ が存在するという形になる。この形で考えると，h が負のときも定理は成立する。即ち次の形で述べる事ができる。

定理 1.19 関数 f は区間 I で微分可能とする。$a, a+h$ が区間 I に属しているとする。このときある θ $(0<\theta<1)$ が存在して

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$$

と書ける。

平均値の定理から次の系が従う。

系 1.20 f, g は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x)=0$ ならば $f(x)$ は定数関数である。
(2) 区間 I において $f'(x)=g'(x)$ ならばある定数 C が存在して $f(x)=g(x)+C$ と書ける。

系 1.21 f は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x)>0$ ならば f は単調増加である。
(2) 区間 I において $f'(x)<0$ ならば f は単調減少である。

系 1.22 f は区間 I で微分可能とする。
(1) 区間 I において $f'(x)\geqq 0$ ならば f は単調非減少である。
(2) 区間 I において $f'(x)\leqq 0$ ならば f は単調非増加である。

演習問題 1.11 平均値の定理から系 1.20, 1.21,1.22 を導け。

これらの系について一言注意。解析学 II で微積分の基本定理を証明するが，そのときときキーになる命題が系 1.20 である。系 1.21，1.22 は数学序論においても学んだ増減表・グラフの概形を描くことの基礎にある命題である。また定理 1.18 は数学序論で不定形の極限を求めるとき有効だったロピタルの定理の基礎にある定理である。通常の講義であればここでそのような応用を扱うのだが，序論で扱っているので省略する。その部分は先に進む前提になるのであやふやな人は序論の該当部分を復習しておくこと。

演習問題 *1.12 定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a)=g(a)=0$ あるいは，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ となるとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。