解析学 I 要綱 #5

1.6　高次導関数と Taylor の定理

導関数が微分可能なとき更にその導関数を考える事が出来る。それを高次導関数と呼ぶ。導関数の導関数を 2 次導関数または 2 階の導関数といい

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad f''(x)$$

表す。n 次 (n 階の) 導関数は

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \qquad f^{(n)}(x)$$

と表す。$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ を 0 回微分した 0 次導関数を意味するので，$f(x)$ と同じものである。以下この節では関数は**何回でも微分可能**である事を仮定する。

関数が和の形になっているものを考える。$F(x) = f(x) + g(x)$ とすると

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

であり，もう一度微分すると

$$F''(x) = f''(x) + g''(x)$$

となる。何回微分しても同様なので

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

となる。

関数が積の形になっているものの微分を考える。$F(x) = f(x)g(x)$ のとき積の微分法より

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である。もう一度微分すると

$$\begin{aligned} F'(x) &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \end{aligned}$$

となる。一般に次が成立する。

命題 1.23 [**ライプニッツの定理**]

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

ここで $\displaystyle\binom{n}{k}$ は 2 項係数で $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ である。

証明　2 項係数に関して

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)(n-k)!}\\ &= \frac{kn!}{k!(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

が成立する。命題を数学的帰納法により証明する。$f(x), g(x)$ を f, g と書く。

$$(fg)'=f'g+fg'=\binom{1}{0}f'g+\binom{1}{1}fg'$$

より $n=1$ のとき成立している。n のとき成立を仮定する。即ち

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

の成立を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f\cdot g) &= \left(\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g)\right)=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left(f^{(n-k)}\right)'g^{(k)}+f^{(n-k)}\left(g^{(k)}\right)'\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)}\\ &= \binom{n}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n+1)}\\ &= \binom{n+1}{0}f^{(n+1)}g^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n-k+1)}g^{(k)}+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}g^{(n+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}\end{aligned}$$

となり $n+1$ のときも成立する。∎

例 1.24 (1)　$f(x)=xe^x$ の n 次導関数を求める。$h=e^x, g=x$ とおくと，$g'=1$, $g''(x)=0$, $g^{(n)}(x)=0$ $(n\geqq 2)$ であり，$h^{(n)}=e^x$ なのでライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{(n-k)}g^{(k)}=xe^x+ne^x$$

となる。

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする。$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, $f'''(x)=-\dfrac{6}{x^4}=-\dfrac{3!}{x^4}$ なので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のときは

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=(-1)^1\frac{1!}{x^{1+1}}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^k\dfrac{k!}{x^{k+1}}$ を仮定する。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}\right)'\\&=(-1)^k(-(k+1))\frac{k!}{x^{k+2}}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{x^{(k+1)+1}}\end{aligned}$$

なので $k+1$ のときも成立する。

演習問題 1.13　次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x^4$
(2) $f(x)=x^3e^x$
(3) $f(x)=x^3\log x$
(4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$
(5) $f(x)=\log(x+1)$
(6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$
(7) $f(x)=\sin x$
(8) $f(x)=\sin x\cos x$

次の定理は「Taylor の定理」と呼ばれ色々な応用がある。

定理 1.25 [Taylor(テーラー) の定理]

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\\&=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。$R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を**剰余項**と呼ぶ。

証明　天下りではあるが，$R=f(x)-\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$ と置き,

$$F(t)=f(x)-\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)-\frac{R}{(x-a)^n}(x-t)^n$$

と置くと,

$$\frac{dF(t)}{dt}=-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right)+\frac{R}{(x-a)^n}n(x-t)^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} + \frac{R}{(x-a)^n} n(x-t)^{n-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{R}{(x-a)^n} n(x-t)^{n-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{R}{(x-a)^n} n(x-t)^{n-1} \\
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{R}{(x-a)^n} n(x-t)^{n-1} \\
&= \left(\frac{R}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \right) n(x-t)^{n-1}
\end{aligned}
$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
F(a) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-a)^n \\
&= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) - R \\
&= R - R = 0 \\
F(x) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k \right) - \frac{R}{(x-a)^n}(x-x)^n \\
&= f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}
$$

が成立するのでロルの定理より $\dfrac{dF(c)}{dt} = 0$ $(a < c < x$ または $x < c < a)$ となる c が存在する。このとき $\dfrac{R}{(x-a)^n} - \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} = 0$ が成立する。$\theta = \dfrac{c-a}{x-a}$ と置くと定理が得られる。 ∎

定理 1.25 は次の形でも述べることができる。

系 1.26 任意の h に対し，ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して

$$
f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} h^n
$$

と表せる。

Taylor の定理の最初の応用として極値に関する次の定理を得る。

定理 1.27 $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。

(1) n が偶数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は極小である。
2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は極大である。

(2) n が奇数のとき $f(x)$ は $x = a$ で極値をとらない。

1) $f^{(n)}(a) > 0$ のとき $f(a)$ は増加の状態にある。

2) $f^{(n)}(a) < 0$ のとき $f(a)$ は減少の状態にある。

証明 (1), (2) とも 1) の場合のみ示す。$f^{(n)}$ 連続かつ $f^{(n)}(a) > 0$ なので a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において $f^{(n)}(x) > 0$ となる。この区間内の x についてテーラーの定理を適用すると $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ なので $f(x) = f(a) + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ となる。(1) 即ち n が偶数の場合 $x \neq a$ ならば $(x-a)^n > 0$ なので，$f(x) - f(a) > 0$ 即ち $f(x) > f(a)$ となる。よって f は $x = a$ で極小である。(2) 即ち n が奇数の場合 $x > a$ なら $(x-a)^n > 0$，$x - a < 0$ ならば $(x-a)^n < 0$ である。よって $x > a$ ならば $f(x) > f(a)$, $x < a$ ならば $f(x) < f(a)$ となっている。∎

Taylor の定理の 2 番目の応用として近似がある。この定理は線型近似より一般的にはよりよい近似を与える。3 次式までの近似はすでに扱っているが，Taylor の定理を用いると「誤差の評価がきちんとできる」という利点がある。$n = 2$ の場合を考えてみよう。$n = 2$ の場合

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

となるが，$f''(x)$ は有界なので，$x - a$ が非常に小さいとき，最後の項は (**非常に**)^2 小さい。よってこの項を無視して考える。これは線型近似を与える。

次に $n = 3$ の場合を考える。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

$x - a$ が非常に小さいとき最後の項は (**非常に**)^3 小さい。この項を無視して $f(x)$ を

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

で近似する。これは線型近似より一般的にはよりよい近似になっている。

h に関する n 次式 $g(h)$ と $f(a+h)$ に対し $d(h) = f(a+h) - g(h), \varepsilon(h) = \dfrac{d(h)}{h^n}$ とおく。$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立するとき $g(h)$ を $f(a+h)$ を $x = a$ で一番よく近似する n 次式という。

命題 1.28 $f(x)$ に対し h に関する n 次式

$$g(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

は $f(a+h)$ を $x = a$ で一番よく近似する n 次式である。

証明 $d(h) = f(x) - g(x) = \dfrac{f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$ なので $\varepsilon(h) = \dfrac{f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!}h$ となる。よって $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立する ∎

自然対数の底 e の近似計算をこの方法により考える。$f(x) = e^x$ のとき，$f'(x) = e^x$ より，任意の n に対し $f^{(n)}(x) = e^x$ となる。剰余項 R_{n+1} を切り捨てた近似式を $g_n(x)$ とすると

$$g_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

となる。$a_n = g_n(1)$ が e の近似値を与える。$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ と計算すると

$$
\begin{aligned}
a_5 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} &= 2.716666667 \\
a_6 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} &= 2.718055556 \\
a_7 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} &= 2.718253968 \\
a_8 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} &= 2.718278770 \\
a_9 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} &= 2.718281526 \\
a_{10} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} &= 2.718281801
\end{aligned}
$$

となる。テーラーの定理を用いた近似のよい点として誤差の評価が容易である事があげられる。剰余項が誤差となるので，その最大値が最大誤差となる。

3 番目の応用として Taylor 級数展開がある。テーラー展開において剰余項 $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となるとき，関数は

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
$$

と表すことができる。これをテーラー級数と言い，このとき $f(x)$ は $x = a$ でテーラー (級数) 展開可能であるという。

今 $f(x) = e^x$ が $x = 0$ でテーラー展開可能である事は仮定しておく。$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ なのでテーラー級数は

$$
1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots
$$

となる。

$f(x) = \sin x$ のときは，$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f''''(x) = \sin x \ldots$ より，テーラー級数は

$$
x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots
$$

となる。

$\cos x$ のテーラー級数は

$$
1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots
$$

となる。

e^x の級数展開の x に形式的に ix (i は虚数単位即ち $\sqrt{-1}$) を代入する事により，オイラーは次のオイラーの公式を導いた。

$$
e^{ix} = \cos x + i \sin x
$$

オイラーの公式と指数法則を知っていれば 3 角関数の加法定理は自然に出て来る。オイラーの公式より $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，$e^{iy}=\cos y+i\sin y$，$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$ を得る。$e^{i(x+y)}=e^{ix}e^{iy}$ なので,

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+i\sin(x+y) &= (\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\end{aligned}$$

この式の実部同士，虚部同士を比較すると加法定理が得られる。

演習問題 1.14　次の関数の $x=0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。この問題のテーラー級数は $-1<x<1$ の場合のみ考える。一般の実数 α と自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\quad(n\geqq 1),\qquad \binom{\alpha}{0}=1$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x)=\log(1+x)$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{1+x}$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

演習問題 1.15　次の関数を $x=a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x)=x^5\quad(a=1)$

(2) $f(x)=e^x\quad(a=1)$

(3) $f(x)=\sin x\quad(a=\pi)$

(4) $f(x)=\log x\quad(a=1)$

演習問題 *1.16　次を示せ。$1\leqq p\leqq n$ を満たす実数 p に対し

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する。$R_n=\dfrac{(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$ を**ロシュの剰余項**と呼ぶ。$p=n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これを**ラグランジェの剰余項**という。$p=1$ としたものを**コーシーの剰余項**と呼ぶ。

演習問題 *1.17　次の関数がテーラー級数展開可能であること，即ち剰余項 R_n に対し $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが，最後の 2 つには制限がつく。

$$\begin{aligned}e^x&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots\\ \sin x&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots \quad (-1 < x < 1) \\
(1+x)^{\alpha} &= \sum_{k=0}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}
$$

テーラー級数は色々な応用があるが，ここでは極限に対する応用のみを扱う。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$ をテーラー級数を利用して求めてみよう。

$$
\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos x - 1}{x^2} &= -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
\frac{\cos x - 1}{x^2} &= -\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}
$$

となる。

演習問題 1.18　次の極限値を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \log(1+x)}{x^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x\sin\frac{1}{x}$