

## 2.6 高階偏導関数とテーラーの定理

この節では関数は何回でも微分できることを仮定し、それを特に断らないことにする。

$f_{xy}$  は  $f$  を最初は  $x$  で微分し次に  $y$  で微分したものである。 $f_{yx}$  は  $f$  を最初は  $y$  で微分し次に  $x$  で微分したものであり、この 2 つは一般に違うものである。しかしある条件の下では一致する。

**定理 2.21** [シュワルツの定理] 点  $(a, b)$  の近傍で、 $f_x, f_y, f_{xy}$  が存在して、 $f_{xy}$  が  $(a, b)$  で連続ならば、 $f_{yx}$  も存在して  $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$  が成立する。

**演習問題 \*2.20** 定理 2.21 を証明せよ。

**定義 2.22** 関数  $f(x, y)$  に対し  $f_x$  および  $f_y$  が存在して、 $f_x$  および  $f_y$  が連続であるとき関数  $f(x, y)$  は  $C^1$  級であるという。定理 2.10 より  $C^1$  級であれば全微分可能である。

$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$  および  $f_{yy}$  が存在してすべての 2 階の偏導関数が連続のとき関数  $f(x, y)$  は  $C^2$  級であるという。 $f$  が  $C^2$  級のとき定理 2.21 より  $f_{xy} = f_{yx}$  が成立する。

関数  $f(x, y)$  が  $n$  階までの導関数がすべて存在して連続であれば  $C^n$  級であるという。関数  $f(x, y)$  が  $C^n$  級であれば、 $n$  階までの導関数は  $x, y$  で微分した回数と同じであればその順序によらず決る ( $\rightarrow$  演習問題 2.21)。

**演習問題 2.21** 上でのべた事を証明せよ。即ち系を仮定して次を示せ。

(1)  $z = f(x, y)$  が  $C^3$  級ならば

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}, \quad z_{yyx} = z_{yxy} = z_{xyy}$$

が成立する。

(2) \*  $z = f(x, y)$  が  $C^n$  級であるとする。 $\alpha$  を  $x$  または  $y$  が  $k$  個 ( $0 \leq k \leq n-2$ ) 並んだもの、 $\beta$  を  $x$  または  $y$  が  $n-k-2$  個並んだものとする

$$z_{\alpha xy \beta} = z_{\alpha y x \beta}$$

が成立する。例えば  $\alpha = xy, \beta = yy$  のときは  $z_{xyxyyy} = z_{yyxyxy}$  を意味する。

(3) \*  $z = f(x, y)$  が  $C^n$  級ならば  $n$  階の導関数は  $x, y$  で微分した回数と同じであればその順序によらず決る。

多変数のテーラーの定理を述べるために次の記号を導入する。この記号を使用しないと、定理を書き下すだけで結構な手間である。

**定義 2.23**  $\frac{\partial}{\partial x}$  を独立したものとして扱い  $\frac{\partial}{\partial x} f$  は  $\frac{\partial}{\partial x}$  が  $f$  に作用していると見なす。このとき形式的に  $D = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}$  と定義し、 $Df$  を  $Df = h \frac{\partial}{\partial x} f + k \frac{\partial}{\partial y} f$  と定義する。また  $D^2 = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  なので

$$D^2 f = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

と考える。一般に  $D^n = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r}$  なので

$$D^n f = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = \sum_{r=0}^n {}_n C_r h^{n-r} k^r \frac{\partial^n}{\partial x^{n-r} \partial y^r} f$$

と考える。

定理 2.24 [テーラーの定理]

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + Df(a, b) + \cdots + \frac{1}{r!} D^r f(a, b) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} f(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{n!} D^n f(a+\theta h, b+\theta k) \end{aligned}$$

となる  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在する。 $n=1$  の場合 (2 変数関数の) 平均値の定理と呼ばれる。

演習問題 \*2.22 定理 2.24 を証明せよ。

$z = f(x, y) = x^2 e^y$  に対し  $(a, b) = (1, 1)$  でテーラー定理を用いて展開して見よう。1 変数の定理の場合と同様に、定理の  $\frac{1}{n!} D^n f(a+\theta h, b+\theta k)$  の項を剰余項といい  $R_n$  で表す。ここでは剰余項を無視した近似を考える。最初に  $n=2$  の場合を考える。 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$  なので  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2e$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = e$  である。よって

$$f(1+h, 1+k) \cong e + 2eh + ek$$

である。これは関数  $f$  を  $(1, 1)$  の周りで  $h, k$  に関する 1 次式で近似している式である (今の場合は接平面の方程式)。1 変数のときと同じように「近似の最もよい 1 次式」を定義する。 $x = a+h, y = b+k$  とする。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立するとき、 $A+Bh+Ck$  は  $(a, b)$  で  $f(x, y) = f(a+h, b+k)$  を「最もよく近似する」1 次式と呼ぶ。この例でいうと  $e+2eh+ek$  は  $(a, b) = (1, 1)$  で  $f(x, y) = x^2 e^y$  を最もよく近似する 1 次式である (証明は演習問題 2.24)。

$n=3$  の場合は

$$f(1+h, 1+k) \cong e + 2eh + ek + eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2} ek^2$$

この式は 2 次式による近似になっている。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^2}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立するとき、 $A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Fk^2$  は  $(a, b)$  で  $f(x, y) = f(a+h, b+k)$  を「最もよく近似する」2 次式と呼ぶ。この例でいうと  $e + 2eh + ek +$

$eh^2 + 2ehk + \frac{1}{2}ek^2$  は  $(a, b) = (1, 1)$  で  $f(x, y) = x^2e^y$  を最もよく近似する 2 次式である (証明は演習問題 2.24)。

$n$  を大きくしていくと高い次数の式による近似になり, 一般に近似が良くなるのは 1 変数の場合と同様である。 $g(h, k)$  を  $h, k$  に関する  $n$  次式とする。

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - g(h, k)}{(\sqrt{h^2 + k^2})^n}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$  が成立するとき,  $g(h, k)$  は  $(a, b)$  で  $f(x, y)$  を「最もよく近似する」 $n$  次式と呼ぶ。この定義とテーラーの定理との関連については演習問題 2.24 参照のこと。

1 変数の場合と同様に 2 変数でも級数展開が考えられるがこの講義では取扱わない。極値問題への応用は次節で扱う。

**演習問題 2.23** 次の関数を  $(a, b)$  において最もよく近似する 1 次式, 2 次式および 3 次式求めよ。ただし演習問題 2.24 の結果は用いてもよい。

(1)  $z = f(x, y) = (x-1)(y+2)$      $(a, b) = (0, 0)$

(2)  $z = f(x, y) = \frac{1}{1-2x+3y}$      $(a, b) = (0, 0)$

(3)  $z = f(x, y) = \sin(x+y)$      $(a, b) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**演習問題 \*2.24**

(1)  $f(a, b) + Df(a, b)$  が  $(a, b)$  で  $f(x, y)$  を最もよく近似する 1 次式であることを示せ。

(2)  $f(a, b) + Df(a, b) + \frac{1}{2!}D^2f(a, b)$  が  $(a, b)$  で  $f(x, y)$  を最もよく近似する 2 次式であることを示せ。

(3)  $\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}D^j f(a, b)$  が  $(a, b)$  で  $f(x, y)$  を最もよく近似する  $n$  次式であることを示せ。