

演習問題 *1.1 定理 1.2 を証明せよ (これらは数学序論でも星印付き演習問題とした)。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の数学的にきちんとした定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

である。数列は収束するので以下 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

(1) ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので、特に $\frac{\varepsilon}{2}$ に対してもある N_1 が存在する。即ち $N_1 \in \mathbb{N}$ で

$$n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。また b_n に対しても同様なので、 $N_2 \in \mathbb{N}$ で

$$n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものが存在する。このとき $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n > N$ となる任意の実数に対し $n > N_1$ かつ $n > N_2$ が成立するので、

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。途中で三角不等式 ($|x + y| \leq |x| + |y|$) を使用した。

(2) $k = 0$ のとき数列は $ka_n = 0$ であり、示すべき式は $|ka_n - k\alpha| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ なので成立している。よって $k \neq 0$ とする。

ε を任意の正の実数とする。任意の ε に対して上の定義の様な N が存在するので、特に $\frac{\varepsilon}{|k|}$ に対してもある N が存在する。即ち $N \in \mathbb{N}$ で

$$n > N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

を満たすものが存在する。このとき

$$n > N \implies |ka_n - k\alpha| = |k(a_n - \alpha)| = |k| \cdot |a_n - \alpha| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

が成立するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k\alpha$ が成立する。

(3) (3) を示すために最初に、収束する数列は有界であること、即ち a_n が収束するとき、

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M$$

が成立することを示す。任意の ε に対し N が存在するので、特に 1 に対しある自然数 N が存在し $n > N$ に対し $|a_n - \alpha| < 1$ が成立する。このとき $-1 < a_n - \alpha < 1$ が成立するので、

$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ が成立する。このとき $M = \max \{ |a_1| \cdot |a_2|, \dots, |a_N|, |\alpha + 1|, |\alpha - 1| \}$ とおく。任意の自然数 n に対し, $n \leq N_1$ のときは $|a_n| \leq M$ が成立する。 $n > N$ のときは

$$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$$

が成立するので, いずれの場合も $|a_n| \leq M$ が成立し, 有界であることが示された。 a_n は α に収束するので, 上に述べた性質をもつ M が存在する。

最初に $\beta = 0$ の場合を考える。 ε を任意の正数とする。 b_n は 0 に収束するのである自然数 N が存在して, 任意の n に対し

$$n > N \implies |b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

が成立する。このとき

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

となるので, この場合は証明された。よって $\beta \neq 0$ とする。

ε を任意の正数とする。 b_n は β に収束するので, $\frac{\varepsilon}{2M}$ に対しある自然数 N_2 が存在して

$$n > N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。また $\frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ に対し自然数 N_1 が存在して

$$n > N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

が成立する。 $N = \max \{ N_1, N_2 \}$ とおくと, $n > N$ のとき

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha \beta| &= |(a_n b_n - a_n \beta) + (a_n \beta - \alpha \beta)| \\ &\leq |a_n| \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\ &\leq M \cdot |(b_n - \beta)| + |(a_n - \alpha)| \cdot |\beta| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\beta|} |\beta| = \varepsilon \end{aligned}$$

となるので証明された。

(4) $\beta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

を示せば, (3) の結果とあわせれば (4) が証明される。よってこの命題を証明する。 ε として $\frac{|\beta|}{2}$ をとると, ある自然数 N_1 が存在して, $n > N_1$ のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成立する。このとき $-\frac{|\beta|}{2} < b_n - \beta < \frac{|\beta|}{2}$ が成立するので, $\beta - \frac{|\beta|}{2} < b_n < \beta + \frac{|\beta|}{2}$ が成立する。このことから $n > N_1$ のとき $|b_n| > \frac{|\beta|}{2}$ が成立する。また b_n は β に収束するので, $\frac{|\beta|^2}{2} \varepsilon$ に対し自然数 N_2 が存在して $n > N_2$ のとき

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2} \varepsilon$$

が成立する。 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n > N$ のとき

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \left| \frac{\beta - b_n}{\beta b_n} \right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta| \cdot |b_n|} < \frac{2|\beta - b_n|}{|\beta| \cdot |\beta|} < \frac{2}{|\beta| \cdot |\beta|} \frac{|\beta|^2}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

となる。

演習問題 *1.2 定理 1.3 を証明せよ

$\{a_n\}$ を上に有界な単調増加数列とする。 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと集合 A は上に有界である。連続性に関する公理 (ワイレルシュトラスの公理) より A には上限 (最小上界) が存在する。これを α とする。 α は上界であるから

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \alpha$$

が成立する。 α は最小上界なので、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\alpha - \varepsilon$ は A の上界ではない。即ち

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \alpha - \varepsilon < a_N$$

が成立する。このとき任意の自然数 n に対し $n > N$ とすると $a_N \leq a_n$ が成立する。よって

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

となる。まとめると

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成立するので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ となる。

演習問題 1.3 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ で帰納的に定義される数列とする。

- (1) 任意の自然数 n に対し $a_{n+1} - a_n \geq 0$ が成立することを数学的帰納法で示せ。
- (2) 任意の自然数 n に対し $a_n \leq 2$ が成立することを示せ。

(1) $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 1 = 1$ なので $a_{1+1} - a_1 = 1 - 0 = 1 \geq 0$ であり、 $n = 1$ のとき命題は成立している。 $n = k$ のとき成立を仮定する、即ち $a_{k+1} - a_k \geq 0$ の成立を仮定する。このとき $a_{k+2} = \frac{1}{2}a_{k+1} + 1, a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1$ なので

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \left(\frac{1}{2}a_{k+1} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2}a_k + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

となる。 $a_{k+1} - a_k \geq 0$ なので $a_{k+2} - a_{k+1} \geq 0$ が成立する。 $n = k + 1$ のときも命題が成立しているので、数学的帰納法により示された。

(2) $a_1 = 0 \leq 2$ なので $n = 1$ のとき成立している。 $n = k$ のとき成立を仮定する、即ち $a_k \leq 2$ の成立を仮定する。このとき

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

なので $n = k + 1$ のときも成立する。

演習問題 1.4 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で帰納的に定義される数列とすると、 $a_n = 1 - 2^{n-1}$ が成立することを示せ。

$$1 - 2^{1-1} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = a_1$$

なので $n = 1$ のとき $a_n = 1 - 2^{n-1}$ は成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する、即ち $a_k = 1 - 2^{k-1}$ の成立を仮定する。

$$a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(1 - 2^{k-1}) - 1 = 1 - 2^k = 1 - 2^{(k+1)-1}$$

となるので $n = k + 1$ のときも成立している。

演習問題 1.5 数列 $\{a_n\}$ が下に有界とは「 $\exists \alpha \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq \alpha$ 」と定義し、 $\{a_n\}$ が単調減少数列であるとは「 $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \leq a_n$ 」と定義する。定理 1.3 を用いて「下に有界な単調減少数列は収束する」ことを証明せよ。

$b_n = -a_n$ とおく。 $\{b_n\}$ が上に有界な単調増加数列であることを示す。 a_n は下に有界なので「 $\exists N \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq N$ 」が成立する。このとき $M = -N$ とおくと任意の自然数 n に対し

$$b_n = -a_n \leq -N = M$$

となり b_n は上に有界である。また a_n は単調減少数列なので任意の自然数 n に対し

$$a_{n+1} \leq a_n$$

が成立している。このとき

$$b_{n+1} = -a_{n+1} \geq -a_n = b_n$$

となるので、 b_n は単調増加数列である。定理 1.3 より b_n は収束する。よって a_n も収束する。

演習問題 *1.6 定理 1.5 を証明せよ（これらは数学序論でも星印付き演習問題とした）。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ の定義は

$$\forall \varepsilon (> 0) \in \mathbb{R} \exists \delta (> 0) \in \mathbb{R} \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立することである。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ とする。

(1) 1) $\varepsilon > 0$ を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して、任意の x に対し

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して、任意の x に対し

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する。このとき $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ とおく。 $0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (A + B)| &= |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

2) $k = 0$ の場合は $kf(x)$ は恒等的に 0 なので成立している。よって $k \neq 0$ とする。任意の正数 ε に対して上の様な δ が存在するので、特に $\frac{\varepsilon}{|k|}$ に対し $\delta > 0$ が存在して $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ を満たす。このとき

$$|kf(x) - kA| = |k(f(x) - A)| = |k| \cdot |f(x) - A| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので証明された。

3) 1 に対しある正数 δ_0 が存在し、任意の x に対し

$$0 < |x - a| < \delta_0 \implies |f(x) - A| < 1$$

が成立している。このとき $M = \max \{ |A + 1|, |A - 1| \}$ とおくと $0 < |x - a| < \delta_0$ のとき $|f(x)| \leq M$ が成立する。

最初に $B = 0$ の場合を考える。 ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し $0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_0, \delta_1 \}$ とおくと、任意の x に対し $0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。この場合は証明された。

よって $B \neq 0$ とする。 ε を任意の正数とする。ある正数 δ_1 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して任意の x に対し

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

が成立する。 $\delta = \min \{ \delta_0, \delta_1, \delta_2 \}$ とおく。 $0 < |x - a| < \delta$ となる x に対し

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)B| + |f(x)B - AB| \\ &= |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |f(x) - A| \cdot |B| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|B|} |B| = \varepsilon \end{aligned}$$

となり、この場合も成立する。

4) 数列のときと同様に $B \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

を示せば、3) と組み合わせて 4) が証明される。

ε として $\frac{|B|}{2}$ をとると、正数 δ_1 が存在して、 $0 < |x - a| < \delta_1$ のとき、

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$$

が成立する。このとき $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$ が成立する。

任意の ε に対して、 $g(x)$ は B に収束するので、ある正数 δ_2 が存在して、 $0 < |x - a| < \delta_2$ となる任意の x に対し

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2} \varepsilon$$

が成立する。このとき $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x - a| < \delta$ となる任意の x に対し

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| &= \left| \frac{B - g(x)}{g(x)B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)| \cdot |B|} \\ &< \frac{2|B - g(x)|}{|B|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する。

(2) 結論が成立しないと仮定すると、 $A > B$ が成立している。 $\varepsilon = \frac{A - B}{2}$ とおくと $\varepsilon > 0$ なので $\delta_1 > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |f(x) - A| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \\ &\implies A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \\ &\implies A - \frac{A - B}{2} < f(x) < A + \frac{A - B}{2} \\ &\implies \frac{A + B}{2} < f(x) < A + \frac{A - B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき $\frac{A + B}{2} < f(x)$ が成立している。

また $\delta_2 > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - B| < \varepsilon$$

が成立する。結論の式は

$$\begin{aligned} |g(x) - B| < \varepsilon &\implies -\varepsilon < g(x) - B < \varepsilon \\ &\implies B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(x) < B + \frac{A - B}{2} \\ &\implies B - \frac{A - B}{2} < g(x) < \frac{A + B}{2} \end{aligned}$$

と変形できる。このとき $g(x) < \frac{A + B}{2}$ が成立している。 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $0 < |x - a| < \delta$ となる x に対し

$$g(x) < \frac{a + B}{2} < f(x)$$

が成立する。これは矛盾，よって結論が正しいことが示される。

(3) 任意の正数 ε に対し，ある δ_1 が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。またある正数 δ_2 が存在して

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - A| < \varepsilon$$

が成立する。 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと x が $0 < |x - a| < \delta$ を満たすとき

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

が成立するので $|g(x) - A| < \varepsilon$ が成立する。よって $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ である。