解析学 I 問題解説 #4

河野

演習問題 1.11　平均値の定理から系 1.20, 1.21,1.22 を導け。

最初に系 1.20 を示す。区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。(1) の条件より $f'(c) = 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) = 0$ 即ち任意の x_1, x_2 に対し $f(x_2) = f(x_1)$ が成立する。これは f が定数関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は $h(x) = f(x) - g(x)$ とおき，$h(x)$ に (1) を適用する。$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ より区間 I において $h'(x) = 0$ なので $h(x)$ は定数関数である。これを C とすると，$f(x) = g(x) + h(x) = g(x) + C$ となる。

次に系 1.21 を示す。区間内の任意の x_1, x_2 について，$x_1 < x_2$ とすると平均値の定理よりある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。(1) の条件より $f'(c) > 0$ かつ $x_2 - x_1 > 0$ なので $f(x_2) - f(x_1) > 0$ である。即ち任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成立する。これは f が単調増加関数である事を示している。よって (1) が示された。

(2) は，$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき $f'(c) < 0, x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) < 0$ である。即ち任意の x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ となる。よって f は単調減少関数である。

最後に系 1.22 を示す。$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

と書ける。このとき (1) の条件より $f'(c) \geqq 0$ となっている。また $x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$ 即ち $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非減少である。よって (1) が示された。

$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 に対し平均値の定理を適用するとある c $(x_1 < c < x_2)$ が存在して $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ と書ける。このとき (2) の条件より $f'(c) \leqq 0$ となっている。$x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) \leqq 0$ 即ち $f(x_1) \geqq f(x_2)$ となる。よって f は単調非増加である。

演習問題 *1.12　定理 1.18 を用いてロピタルの定理を証明せよ。ロピタルの定理とは以下の内容の定理である。

f, g は a の周りで微分可能とする。$f(a) = g(a) = 0$ あるいは，$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ となるとき，$\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，両者の値は一致する。ここで a は $\pm\infty$ でもよい。

最初に $f(a) = g(a) = 0$ の場合を証明する。$\lim_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ および $\lim_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ を証明すれば $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が証明される。

$x > a$ の場合を考える。$f(a) = g(a) = 0$ なので

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

が成立している。このとき定理 1.18 より $a < c < x$ となる c で

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

となるものが存在する。$x \to a+0$ とすると $c \to a+0$ となるので

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する。$x < a$ の場合も同様なので省略する。

次に $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ の場合を考える。$F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ $(x \neq a)$, $F(a) = 0$, $G(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ $(x \neq a)$, $G(a) = 0$, とおくと F および G は $x = a$ で連続である。F, G に今証明したロピタルの定理の $f(a) = g(a) = 0$ の場合を適用すると

$$\lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。ここで $f(x)F(x) = 1$ より $f'(x)F(x) + f(x)F'(x) = 0$ 即ち $F'(x) = -\dfrac{f'(x)F(x)}{f(x)}$ が成立する。同様に $G'(x) = -\dfrac{g'(x)G(x)}{g(x)}$ が成立する。上式に代入すると

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{g(x)}{f(x)} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)}$$

が成立する。これを整理する

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が得られる。ただし途中 $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)}$ の収束を仮定した。