解析学 I 演習問題解説 #5

河野

演習問題 1.13　次の関数の n 次導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^4$
(2) $f(x) = x^3 e^x$
(3) $f(x) = x^3 \log x$
(4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
(5) $f(x) = \log(x+1)$
(6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$
(7) $f(x) = \sin x$
(8) $f(x) = \sin x \cos x$

この問題では「数学的帰納法で証明せよ」と明示的に書いていないので，数学的帰納法で証明しても，しなくてもよいが，「数学的帰納法で証明せよ」という条件が付いた場合はできるようにしておくこと。

(1)　$f'(x) = 4x^3$，$f''(x) = 12x^2$，$f^{(3)}(x) = 24x$，$f^{(4)}(x) = 24$，$f^{(5)}(x) = 0$，$f^{(n)}(x) = 0$ $(n \geqq 6)$ となる。この書き方でもよいが，少し「格好つける」なら順列の記号 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = {}_4P_n x^{4-n}$$

としてもよい。

(2)　ライプニッツの定理

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

を用いる。$f(x)$ は関数に用いられているので，定理の $f(x)$ を $g(x)$ に $g(x)$ を $h(x)$ に変更して，$g(x) = e^x$，$h(x) = x^3$ とすると，$h'(x) = 3x^2$，$h''(x) = 6x$，$h^{(3)}(x) = 6$，$h^{(k)}(x) = 0$ $(k \geqq 4)$ および $g^{(n)}(x) = e^x$ である。よって

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} g^{(n)}(x)h(x) + \binom{n}{1} g^{(n-1)}(x)h^{(1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(n-2)}(x)h^{(2)}(x) + \binom{n}{3} g^{(n-3)}(x)h^{(3)}(x) \\
&= e^x x^3 + ne^x 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} e^x 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} e^x 6 \\
&= \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right) e^x
\end{aligned}$$

となる。

(3)　ライプニッツの定理を用いてもよいが，何回か微分してみる。$f'(x) = 3x^2 \log x + x^2$，$f''(x) = 6x \log x + 5x$，$f^{(3)}(x) = 6 \log x + 11$，$f^{(4)}(x) = \dfrac{6}{x}$ となる。4 次以上の導関数について $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ を用いると，次が得られる。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 \log x + x^2 \\
f''(x) &= 6x \log x + 5x \\
f^{(3)}(x) &= 6 \log x + 11 \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n 6(n-4)! \frac{1}{x^{n-3}} \quad (n \geqq 4)
\end{aligned}$$

この事実をきちんと証明するには勿論数学的帰納法が必要である。

(4)　$f(x)=(x+1)^{-1}$ なので $f'(x)=-(x+1)^{-2}$, $f''(x)=2(x+1)^{-3}$, $f'''(x)=-6(x+1)^{-4}=-3!(x+1)^{-4}$ となるので $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}$ と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。予想が正しくない場合は「証明」の途中で辻褄が合わなくなるので，予想が間違っていることに気がつく。

$n=1$ のときは $f'(x)=-(x+1)^{-2}=(-1)^1 1!(x+1)^{-(1+1)}$ なので予想は正しい。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)}$$

を仮定する。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k k!(x+1)^{-(k+1)}\right)' \\ &= (-1)^k k!(-(k+1))(x+1)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)!(x+1)^{-(k+1)+1} \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ のときも予想が正しいことがわかる。

(5)　$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，$f''(x)=-(x+1)^{-2}$，$f^{(3)}(x)=2(x+1)^{-3}$，$f^{(4)}(x)=-6(x+1)^{-4}$ なので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

と予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(-1)^{1+1}(1-1)!(x+1)^{-1}$$

なので予想は正しい。$n=k$ のとき予想が正しいと仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}$ の成立を仮定する。このとき $f^{(k)}(x)$ を x で微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= \left((-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}\right)' \\ &= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(x+1)^{-k-1} \\ &= (-1)^{(k+1)+1}((k+1)-1)!(x+1)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

となるので $k+1$ のときも成立する。

(6)　部分分数展開して

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$$

とできるので

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\frac{1}{x^{n+1}}-(-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}}$$

と予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法で示す。$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x-1}\right)' \\
&= -x^{-2} + (x-1)^{-2} \\
&= (-1)^1 1!\frac{1}{x^{1+1}} - (-1)^1 1!\frac{1}{(x-1)^{1+1}}
\end{aligned}$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\frac{1}{x^{k+1}} - (-1)^k k!\frac{1}{(x-1)^{k+1}}$$

の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\
&= (-1)^k k!\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' - (-1)^k k!\left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}}\right)' \\
&= (-1)^k k!\frac{-(k+1)}{x^{k+2}} - (-1)^k k!\frac{-(k+1)}{(x-1)^{k+2}} \\
& (-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{x^{(k+1)+1}} - (-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{(x-1)^{(k+1)+1}}
\end{aligned}$$

となる。よって $k+1$ のときも成立している。

(7)　$f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f^{(3)}(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$ より

$$f^{(4m)}(x)=\sin x, \quad f^{(4m+1)}(x)=\cos x, \quad f^{(4m+2)}(x)=-\sin x, \quad f^{(4m+3)}(x)=-\cos x$$

となる。場合分けによらない書き方もある。$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ となるので，$f''(x)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(3)}=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$ となる。一般に

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

とも表すことができる。

(8)　$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ となる。前問の結果 $[(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)]$ より

$$(\sin 2x)^{(n)} = 2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

と予想できる。

　$n=1$ のとき

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $(\sin 2x)^{(k)}=2^k\sin\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)$ を仮定

する。

$$
\begin{aligned}
(\sin 2x)^{(k+1)} &= \left((\sin 2x)^{(k)}\right)' = \left(2^k \sin\left(2x + \frac{k\pi}{2}\right)\right)' \\
&= 2^k \cdot 2\sin\left(2x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2^{k+1}\sin\left(2x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

なので $n = k+1$ のときも成立する。よって

$$
(\sin x \cos x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)
$$

である。

演習問題 1.14　次の関数の $a = 0$ におけるテーラー級数を求めよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。この問題のテーラー級数は $-1 < x < 1$ の場合のみ考える。一般の実数 α と自然数 n に対し

$$
\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \geqq 1), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1
$$

と定義する。これは α が自然数の場合の 2 項係数の拡張になっている。

(1) $f(x) = \log(1+x)$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{1+x}$　　(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(1)　$f(x) = \log(1+x)$ に対しては，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$，$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$，$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$，となる。$n$ 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。
(a) $n = 1$ のとき：

$$
f^{(1)}(x) \quad = \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}
$$

なので $n = 1$ のとき予想は正しい。
(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) \quad &= \quad \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\right)' \\
&= \quad (-1)^{k+1}(k-1)!\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\
&= \quad (-1)^{(k+1)+1}\frac{k!}{(1+x)^{k+1}} \\
&= \quad (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+0)^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$，および $f(0) = \log(1+0) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-1)^{k+1}(k-1)!x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k \end{aligned}$$

となる。$\sum$ を用いず

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。

数学的帰納法の形式だけを書いて実際は何も証明していない，間違った証明をする学生がいる。この問題の数学的帰納法の部分の間違った「証明」を次に書く。間違いを見つけられない人は，理解している友達か私に質問して下さい。

n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{(1+x)^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ の成立を仮定する。n に $k+1$ を代入すると

$$f^{(k+1)}(x) \quad = \quad (-1)^{(k+1)+1}\frac{((k+1)-1)!}{(1+x)^{k+1}}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

が成立する。

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，$f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$，$f'''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想される。
(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。
(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)' \\ &= k!\frac{-(k+1)(-1)}{(1-x)^{k+2}} \\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

が成立する。
　0 以上の整数 k に対し $f^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{(1-0)^{k+1}} = k!$，が成立するので

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k! x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots$$

という書き方でもよい。
(3) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$，$f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}$，
$f'''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3}$，となる。$n$ 次導関数は

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \end{aligned}$$

と予想される。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) \quad = \quad \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} = 1!\binom{\frac{1}{2}}{1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k}(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\ &= k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{2}-k}\right)' \\ &= k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}-k\right)\left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)}\right) \end{aligned}$$

となるが

$$\begin{aligned} k!\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{1}{2}-k\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\left(\frac{1}{2}-k\right) \\ &= (k+1)!\frac{\frac{1}{2}}{1}\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdots\frac{\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k}\frac{\left(\frac{1}{2}-(k+1)+1\right)}{k+1} \\ &= (k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1} \end{aligned}$$

となるので

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)!\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\left((1+x)^{\frac{1}{2}-(k+1)}\right)$$

が得られ，$k+1$ のときも成立している。よって自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = n!\binom{\frac{1}{2}}{n}(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(0) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k} \quad (k \geqq 1)$，$f(0)=1$ なので $f^{(k)}(0) = k!\binom{\frac{1}{2}}{k} \quad (k \geqq 0)$ となる。

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k \\ &= \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}k!\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k \end{aligned}$$

となる。

(4)　n 次導関数を計算してもできるが，ここでは異なる方法で求めてみる。 x を $-1<x<1$ を満たす実数とする。初項 1 公比 $-x$ の等比数列の和を考えると

$$\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n$$

が成立する。ここで $n \to \infty$ とすると $(-x)^n \to 0$ なので

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^x + \cdots$$

となる。

(5)　n 次導関数を求めなくても，$f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(x)(1+x^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。$1+x^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + {}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(x)2x + {}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(x)2 = 0$$

となる。$x=0$ を代入することにより，$f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ を得る。$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2$ より

$$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

が成立することが予想される。

まず奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(0) = 0$」を示す。

(a) $n=1$ のとき；$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ なので $f'(0)=0$ となり，成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する;即ち $f^{(2k-1)}(0)=0$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ が成立しているので，$n-2=2k-1$ とすると

$$f^{2k+1}(0) + (2k+1)2kf^{2k-1}(0) = 0$$

が得られる。よって $f^{2(k+1)-1}(0) = f^{2k+1}(0) = 0$ となり，$k+1$ のときも成立している。

次に偶数の場合を証明する。即ち即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$」を示す。

(a) $n=0$ のとき；$f^{(0)}(0) = f(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = (-1)^0(2\cdot 0)!$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(0) = (-1)^k(2k)!$ を仮定する。任意の自然数 n に対し $f^{(n)}(0)+n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$ が成立しているので，$n-2=2k$ とすると

$$f^{2k+2}(0) + (2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) = 0$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} f^{2(k+1)}(0) &= -(2k+2)(2k+1)f^{2k}(0) \\ &= -(2k+2)(2k+1)(-1)^k(2k)! \\ &= (-1)^{k+1}(2(k+1))! \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

よって

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(0) x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k (2k)! x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}
\end{aligned}
$$

を得る。

別の方法：(4) の

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

の x に x^2 を代入して

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

を得る。

演習問題 1.15　次の関数を $x = a$ でテーラー (級数) 展開せよ (テーラー展開可能であることは仮定してよい)。

(1) $f(x) = x^5 \quad (a = 1)$　　(2) $f(x) = e^x \quad (a = 1)$

(3) $f(x) = \sin x \quad (a = \pi)$　　(4) $f(x) = \log x \quad (a = 1)$

(1)　導関数を求めてもよいが，多項式なので

$$
\begin{aligned}
x^5 &= \Big((x-1) + 1 \Big)^5 \\
&= 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5
\end{aligned}
$$

と 2 項展開してもよい。

(2)　$f(x) = e^x$ とおくと，$f'(x) = e^x$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

となる。そこまでやる必要はないかもしれないが，一応数学的帰納法でこの事実を確認しておく。示すべき命題は「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x) = e^x$」である。

(a) $n = 1$ のとき $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$ なので成立している。

(b) $n = k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)} = e^x$ を仮定する。このとき

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^k(x)\right)' \\
&= (e^x)' = e^x
\end{aligned}
$$

よってテーラー級数は

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e}{k!}(x-1)^k
\end{aligned}
$$

となる。

(3)　$f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x$，$f''(x)=-\sin x$，$f'''(x)=-\cos x$，$f^{(4)}(x)=\sin x$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。よって

$$
f^{2n}(x)=(-1)^n \sin x, \qquad f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x
$$

と予想される。

まず偶数の場合を証明する。即ち即ち「0 以上の自然数 n に対し $f^{(2n)}(x)=(-1)^n \sin x$」を示す。

(a) $n=0$ のとき； $f^{(0)}(x)=f(x)=\sin x=(-1)^0\sin x$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k)}(x)=(-1)^k \sin x$ を仮定する。

$$
\begin{aligned}
f^{2(k+1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k)}(x)\right)'\right)' \\
&= \left(\left((-1)^k \sin x\right)'\right)' = \left((-1)^k \cos x\right)' \\
&= (-1)^k\left(-\sin x\right) \\
&= (-1)^{k+1}\sin x
\end{aligned}
$$

となり，$k+1$ のときも成立している。

次に奇数の場合を証明する。即ち「$\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n+1}\cos x$」を示す。

(a) $n=1$ のとき； $f'(x)=(\sin x)'=\cos x=(-1)^{1+1}\cos x$ なので成立している。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k+1}\cos x$ を仮定する。

$$
\begin{aligned}
f^{(2(k+1)-1)}(x) &= \left(\left(f^{(2k-1)}(x)\right)'\right)' \\
&= \left(\left((-1)^{k+1} \cos x\right)'\right)' = \left((-1)^{k+1}(-\sin x)\right)' \\
&= (-1)^{k+1}\left(-\cos x\right) \\
&= (-1)^{(k+1)+1}\cos x
\end{aligned}
$$

となり，$k+1$ のときも成立している。$f^{(2k)}(\pi)=(-1)^k\sin\pi=0$，$f^{(2k-1)}(\pi)=(-1)^{k+1}\cos\pi=$

$(-1)^{k+1}(-1) = (-1)^k$，なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\pi)(x-\pi)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(\pi)(x-\pi)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(\pi)(x-\pi)^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} (-1)^k (x-\pi)^{2k-1}
\end{aligned}$$

を得る。

(4)　$f(x) = \log x$ に対しては，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$，$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$，$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$，となる。n 次導関数は $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$ と予想される。これを数学的帰納法で証明する。

(a) $n=1$ のとき：

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{x^1}$$

なので $n=1$ のとき予想は正しい。

(b) $n=k$ のとき成立を仮定する；即ち $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \dfrac{(k-1)!}{x^k}$ の成立を仮定する。$f^{(k)}(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)! \frac{-k}{x^{k+1}} \\
&= (-1)^{(k+1)+1} \frac{((k+1)-1)!}{x^{k+1}}
\end{aligned}$$

が得られるので，$k+1$ のときも成立している。よって任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

が成立する。

$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} \dfrac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k+1}(k-1)!$，および $f(1) = \log 1 = 0$ なので

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k \\
&= f(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1}(k-1)!(x-1)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} (x-1)^k
\end{aligned}$$

となる。

$$f(x) = a_0 + a_(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されているときには $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ である。n 次導関数を求めなくとも何らかの方法で求めてもよい。

例えば，演習問題 1.14 (2) では等比数列の和から求めることもできる。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

が得られているとき，この式の x に $-x$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n + \cdots \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots\end{aligned}$$

となり (4) を得る。更にこの式に x^2 を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(x^2)} \\ &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} \cdots\end{aligned}$$

となり (5) を得るがこれはすでに紹介してある。

演習問題 ***1.16**　次を示せ。$1 \leqq p \leqq n$ を満たす実数 p に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する。$R_n = \dfrac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n$ を**ロシュの剰余項**と呼ぶ。$p = n$ とすると定理 1.25 の剰余項になる。これを**ラグランジェの剰余項**という。$p = 1$ としたものを**コーシーの剰余項**と呼ぶ。

定理 1.25 の証明と少し異なるがほぼ平行に議論が進む。

$$\begin{aligned}A &= \frac{(n-1)!}{(x-a)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) \\ F(t) &= f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{(x-t)^p}{(n-1)!}\right)\end{aligned}$$

とおくと $F(x) = f(x) - f(x) = 0$,

$$F(a) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\right) = 0$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= -\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{(x-t)^p}{(n-1)!}\right)' \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right) + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + A\frac{p(x-t)^{p-1}}{(n-1)!} \\
&= \left(Ap - f^{(n)}(t)(x-t)^{n-p}\right)\frac{(x-t)^{p-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

$F'(a+\theta(x-a)) = 0$ となる θ $(0<\theta<1)$ が存在するので

$$
Ap - f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-(a+\theta(x-a)))^{n-p} = 0
$$

より結論が得られる。

演習問題 ***1.17**　次の関数がテーラー級数展開可能であること，即ち剰余項 R_n に対し $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ が成立することを示せ。最初の 3 つの式は任意の x について成立するが，最後の 2 つには制限がつく。

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + \cdots \quad (-1<x<1) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots \quad (-1<x<1)
\end{aligned}
$$

ここではすでにそれぞれの関数の n 次導関数は既知とする。即ち

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
(\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
(\log x)^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} \\
((1+x)^\alpha)^{(n)} &= n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

は既知とする。また前期の極限の所でやった

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$$

も既知とする。本問では $a = 0$ におけるテーラー展開なので剰余項は

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

である。

$f(x) = e^x$ のとき，$f(x)$ は単調増加なので $|f^{(n)}(\theta x)| = |e^{\theta x}| \leqq e^{|x|}$ が成立するので

$$|R_n| \leqq \frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}|x|^n}{n!} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = \sin x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)| = \left|\sin\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\right| \leqq 1$ なので

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = \cos x$ のとき $|f^{(n)}(\theta x)| = \left|\cos\left(\theta x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\right| \leqq 1$ なので

$$|R_n| \leqq \frac{|x|^n}{n!}$$

となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = \log(1+x)$ のとき剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}x^n \\
&= \frac{(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n(n-1)!}x^n
\end{aligned}
$$

である。$0 < \theta < 1, -1 < x < 1$ より $-\theta < \theta x < \theta$ であり，辺々に 1 を加えて $0 < 1-\theta < 1+\theta x$ を得る。よって

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

となる。また $1+\theta x > 1-|x| > 0$ なので

$$\begin{aligned}|R_n| &= \left|\frac{(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(\theta x+1)^n(n-1)!}x^n\right| \\ &= \frac{|x|^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} < \frac{|x|^n}{1+\theta x} < \frac{|x|^n}{1-|x|}\end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ となる。

$f(x) = (1+x)^\alpha$ のときも剰余項としてコーシーの剰余項を採用する。今 $a=0$ なので

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}x^n \\ &= \frac{(1-\theta)^{n-1}n!\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}}{(n-1)!}x^n \\ &= n\binom{\alpha}{n}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

である。$\alpha \geqq 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqq (1+|x|)^{\alpha-1}$ であり，$\alpha < 1$ のとき $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqq (1-|x|)^{\alpha-1}$ のなのでいずれの場合も θ に関係のない定数 M で $(1+\theta x)^{\alpha-1} \leqq M$ とできる。また全問と同様に $0 < \dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ が成立するので，

$$|R_n| \leqq n\binom{\alpha}{n}|x|^n$$

となる。$c_n = n\dbinom{\alpha}{n}|x|^n$ と置くとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ が示されれば証明が終わる。ここで後で証明するが，次の結果を使う。

$\{c_n\}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = c$ が存在して $0 \leqq c < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ である。

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\alpha-n}{n}|x|$$

なので $0 \leqq \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = |x| < 1$ となる。

最後に途中で使った結果を示す。$c < 1$ なので $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$ に対しある自然数 N が存在して任意の自然数 n に対し

$$n > N \implies \left|\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c\right| < \varepsilon$$

が成立する。このとき $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} - c < \varepsilon$ より $|c_{n+1}| < (c+\varepsilon)|c_n|$ となる。$d = c + \varepsilon$ とおくと $0 < d < 1$ であり $|c_{n+1}| < d|c_n|$ が成立している。よって $n > N$ となる n に対し $|c_n| < d^{n-N}|c_N|$ が成立するので $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ となる。

演習問題 1.18　次の極限値を求めよ。それぞれの関数のテーラー級数は既知としてよい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

(1)

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}x\cos x &= x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \cdots \\ \sin x - x\cos x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots - \left(x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{30}x^2 + \cdots\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

なので

$$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}x + \frac{1}{4!}x^2 + \cdots$$

$x \to \infty$ のとき第 1 項，第 2 項は $\to 0$ だが，第 4 項以降はすべて $\to \infty$ で，各項の和なので

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

(3)

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\ \log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots - \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} \\
&= \frac{2x + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots} = \frac{2 + \frac{2}{3!}x^2 + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^1 + \cdots}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} = 2
$$

(4)

$$
(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x^2 + \cdots
$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x^2 + \cdots\right)}{x} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}x + \cdots
\end{aligned}
$$

なので

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}
$$

(5)

$$
\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
$$

より

$$
\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \cdots
$$

なので

$$
\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}
$$

(6)

$$
\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots
$$

より

$$
\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{120}\frac{1}{x^5} - \cdots
$$

なので

$$x \sin \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{6}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{120}\frac{1}{x^4} - \cdots$$

となる。よって

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$