解析学 I 問題解説 #7

河野

演習問題 ***2.1**　定理 2.7 を証明せよ。

D を有界閉領域とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続な関数とする。1 変数の証明と同様に最初に f が有界であることを示す。そのために f が有界でないと仮定する。任意の自然数 n に対し D の点 $P_n = (x_n, y_n)$ で $f(P_n) > n$ となる点が存在する。$A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ と置く。収束する部分数列を選ぶ。ここで長方形領域に対し次の記法を定義する。

$$R(a,b,c,d) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d \right\}$$

D は有界なのである長方形領域 $R(a,b,c,d)$ で $D \subseteq R(a,b,c,d)$ となるものが存在する。$a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d, \alpha(1) = 1$ とする。$e_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, f_1 = \dfrac{c_1+d_1}{2}$ と置き，$R(a,b,c,d)$ を 4 つの長方形領域

$$R(a_1,e_1,c_1,f_1), \quad R(a_1,e_1,f_1,d_1), \quad R(e_1,b_1,c_1,f_1), \quad R(e_1,b_1,f_1,d_1)$$

に分けると，4 つのどれかは A の点を無限個含んでいる。無限個含んでいるものを選び，その頂点を a_2, b_2, c_2, d_2 とする。例えば $R(a_1,e_1,c_1,f_1)$ が選ばれたときは $a_2 = a_1, b_2 = e_1, c_2 = c_1, d_2 = f_1$ とする。また $R(a_2,b_2,c_2,d_2)$ に含まれる D の点で $n > \alpha(1)$ となるものが存在するので，その点を $P_{\alpha(2)}$ とする。この操作を続けることにより点列 $\left\{ P_{\alpha(n)} \right\}$ が定まる。a_n, c_n は上に有界な単調増加数列であり，b_n, d_n は下に有界な単調減少数列である。

$$a_n \leqq x_{\alpha(n)} \leqq b_n, \qquad c_n \leqq y_{\alpha(n)} \leqq d_n$$

であり，

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a), \qquad d_n - c_n = \frac{1}{2^{n-1}}(d-c)$$

なので $x_{\alpha(n)}, y_{\alpha(n)}$ は収束する。よって $P_0 = \lim_{n\to\infty} P_{\alpha(n)}$ とおくと，D が閉集合ということから $P_0 \in D$ が分かる。どうしてかというと，$\forall \varepsilon > 0$ に対し $d(P_{\alpha(n)}, P_0) < \varepsilon$ となる点 $P_{\alpha(n)}$ が存在するので，P_0 は D の外点ではない。よって P_0 は D の内点か境界点である。内点ならば $P_0 \in D$ であるし，境界点ならば，閉集合ということから $\partial D \subseteq D$ となるので，やはり $P_0 \in D$ である。f は連続なので

$$\lim_{n\to\infty} f(P_{\alpha(n)}) = f(\lim_{n\to\infty} P_{\alpha(n)}) = f(P_0)$$

となるが，$f(P_{\alpha(n)}) > \alpha(n) \geqq n$ なので $\lim_{n\to\infty} f(P_{\alpha(n)}) = \infty$ となる。これは矛盾なので，最初の「有界でない」という仮定が正しくない。よって有界が証明された。

$X = \{ f(P) \mid P \in D \}$ とおくと X は有界なので上限 $M = \sup X$ が存在する。$f(P) = M$ となる点 P が存在すれば P は最大値を与えるので，$f(P) = M$ となる点 P が存在しないとする。このとき $g(P) = \dfrac{1}{M - f(P)}$ は D で定義される連続関数であるが上に有界でない。これは示したことに矛盾するので，$f(P) = M$ となる点 P は存在する。これが最大値を与える。

演習問題 2.2　上の関数が原点において連続でない事を示せ。また原点における偏導関数を求めよ

$z=f(x,y)$ が原点において連続であるとは $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ が成立することである。原点で連続でないことを示すには，この極限が存在しないか，存在しても $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$ でないことを示せばよい。

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおいて極座標で考える。$(x,y)\to(0,0)$ と $r\to 0$ は同値である。$f(x,y)=\dfrac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$ となるので極限値は θ に依存する。たとえば $\theta=0$ のときは 0 であるが $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときは $\dfrac{1}{2}$ である。2 変数の極限の定義よりこれは収束しない。よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。偏導関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0k}{0^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0
\end{aligned}
$$

である。

演習問題 2.3　$f(x,y)$ が $(a.b)$ で全微分可能のとき f は偏微分可能であり，定義 2.9 の A,B は

$$
A=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\qquad B=\frac{\partial f}{\partial y}(a)
$$

となる事を示せ。

$f(a+h,b)$ は $f(a+h,b+k)$ において $k=0$ としたものなので，

$$
f(a+h,y)=f(a,b)+Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2+0^2}
$$

が成立する。よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2+0^2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\right)=A
\end{aligned}
$$

となる。よって f は x に関して偏微分可能であり，$f_x(a,b)=A$ となる。

$f(a,b+k)$ は $f(a+h,b+k)$ において $h=0$ としたものなので，

$$
f(a,b+k)=f(a,b)+Bk+\varepsilon(0,k)\sqrt{0^2+k^2}
$$

が成立する。よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{Bk+\varepsilon(0,k)\sqrt{0^2+k^2}}{k}\\
&= \lim_{k\to 0}\left(B+\varepsilon(0,k)\frac{|k|}{k}\right)=B
\end{aligned}
$$

となる。よって f は y に関して偏微分可能であり，$f_y(a,b)=B$ となる。

演習問題 *2.4　定理 2.10 を証明せよ。

f_x が連続であるとする。

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)+f(a,b+k)-f(a,b)$$

と変形して 1 変数の結果を使う。$\varepsilon_1(h,k)=\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h}-f_x(a,b+k)$ とおくと $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h,k)=0$ であり，$\varepsilon_1(k)=\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}-f_y(a,b)$ とおくと $\lim_{k\to 0}\varepsilon_1(k)=0$ である。また f_x は連続なので $\delta(k)=f_x(a,b+k)-f_x(a,b)$ とおくと $\lim_{k\to 0}\delta(k)=0$ である。このとき

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h,k)&=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&=\frac{f_x(a,b+k)h+\varepsilon_1(h,k)h+f_y(a,b)k+\varepsilon_1(k)k-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&=\frac{f_x(a,b)h+\delta(k)h+\varepsilon_1(h,k)h+\varepsilon_1(k)k-f_x(a,b)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&=\frac{\delta(k)h+\varepsilon_1(h,k)h+\varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}
\end{aligned}$$

が成立する。

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq 1,\qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leqq 1$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(h,k)|&\leqq\left|\frac{\delta(k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+\left|\frac{\varepsilon_1(h,k)h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+\left|\frac{\varepsilon_1(k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\\
&\leqq|\delta(k)|\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+|\varepsilon_1(h,k)|\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|+|\varepsilon_1(k)|\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\\
&\leqq|\delta(k)|+|\varepsilon_1(h,k)|+|\varepsilon(k)|
\end{aligned}$$

となり $\varepsilon(h,k)\to 0$ が示される。

演習問題 2.5　演習問題 2.2 の関数は原点で全微分可能でない事を示せ。

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能でことの定義は

$$\varepsilon(h,k)\ =\ \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立することである。

$(x,y)=(0,0)$ のとき

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{\dfrac{hk}{h^2+k^2}-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\end{aligned}$$

となる。$h=r\cos\theta, k=r\sin\theta$ とおくと

$$\varepsilon(h,k) = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$$

となる。$(h,k)\to(0,0)$ と $r\to 0$ は同値でなので $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$ となる。これは収束しないので f は $(0,0)$ において全微分可能ではない。

全微分可能な関数は連続であるので，そのことを使ってた別解もある。まずある点で全微分可能な関数はその点で連続であることを示す。$z=f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能のとき

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成立している。この式は

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

となる。このとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}f(a+h,b+k)=f(a,b)$$

となるので (a,b) で連続である。

よって問題の関数が $(0,0)$ で全微分可能であるとすると $(0,0)$ で連続である。しかし演習問題 2.1 よりこの関数は $(0,0)$ で連続ではない。よって全微分可能ではない。