

演習問題 2.6 定理 2.11 を示せ。

ここでは $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ の記法を用いよう。 $g(x, y)$ は x に関し偏微分可能であるから x に関し連続である。

$$\begin{aligned} (f(x, y)g(x, y))_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y)g(x+h, y) - f(x, y)g(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y)g(x+h, y) - f(x, y)g(x+h, y) + f(x, y)g(x+h, y) - f(x, y)g(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} g(x+h, y) + f(x, y) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} \\ &= f_x(x, y)g(x, y) + f(x, y)g_x(x, y) \end{aligned}$$

y に関しても同様に

$$\begin{aligned} (f(x, y)g(x, y))_y &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k)g(x, y+k) - f(x, y)g(x, y)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k)g(x, y+k) - f(x, y)g(x, y+k) + f(x, y)g(x, y+k) - f(x, y)g(x, y)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} g(x, y+k) + f(x, y) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(x, y+k) - g(x, y)}{k} \\ &= f_y(x, y)g(x, y) + f(x, y)g_y(x, y) \end{aligned}$$

演習問題 *2.7 命題 2.12 を示せ。

これを示すために全微分の式を思いだそう。 $z = z(u(x, y))$ が全微分可能のとき

$$z(u(x+h, y+k)) = z(u(x, y)) + z_x(u(x, y))h + z_y(u(x, y))k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくと, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立した。逆に

$$z(u(x+h, y+k)) = z(u(x, y)) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

に対し $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するとき, z は全微分可能であり, $A = z_x(x, y), B = z_y(x, y)$

が成立する (→ 演習問題 2.3)。

$u = u(x, y)$ が全微分可能なので

$$u(x+h, y+k) = u(x, y) + u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくと, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(h, k) = 0$ が成立する。

$z = z(u)$ は微分可能なので

$$z(u+H) = z(u) + \frac{dz}{du}H + \varepsilon(H)H$$

とすると $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$ が成立している。

$u = u(x, y), H = u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ とおくと $u(x+h, y+k) = u(x, y) + H$ なので

$$\begin{aligned} z(u(x+h, y+k)) &= z(u(x, y)) + \frac{dz}{du} \left(u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \right) + \varepsilon(H)H \\ &= z(u(x, y)) + \frac{dz}{du} u_x h + \frac{dz}{du} u_y k + \frac{dz}{du} \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} + \varepsilon(H)H \\ &= z(u(x, y)) + \frac{dz}{du} u_x h + \frac{dz}{du} u_y k + \left(\frac{dz}{du} \varepsilon_1(h, k) + \frac{\varepsilon(H)H}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) \sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

$\varepsilon(h, k) = \frac{dz}{du} \varepsilon_1(h, k) + \frac{\varepsilon(H)H}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ とおくと $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ を示せばよい。 $\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1, \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$ より

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon(H)H}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &= \left| \varepsilon(H) \frac{u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |\varepsilon(H)| \left(|u_x(x, y)| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |u_y(x, y)| \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + |\varepsilon_1(h, k)| \right) \\ &\leq |\varepsilon(H)| (|u_x(x, y)| + |u_y(x, y)| + |\varepsilon_1(h, k)|) \end{aligned}$$

となる。 $(h, k) \rightarrow 0$ のとき $H \rightarrow 0$ となり、 $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ となる。また $\varepsilon_1(h, k) \rightarrow 0$ なので $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ が成立する。

演習問題 *2.8 定理 2.13 を示せ。

$z = z(x, y)$ が全微分可能のとき

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + z_x(x, y)h + z_y(x, y)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくと、 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立した。逆に

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

に対し $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立するとき、 z は全微分可能であり、 $A = z_x(x, y), B = z_y(x, y)$ が成立する。

$z(x(s, t), y(s, t))$ の全微分可能性を表す式を書くと、

$$\begin{aligned} z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k)) &= z(x(s, t), y(s, t)) + z_x(x(s, t), y(s, t))h \\ &\quad + z_y(x(s, t), y(s, t))k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned} \quad (1)$$

となっている。このとき

$$\begin{aligned} z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k)) &= z(x(s, t), y(s, t)) \\ &\quad + (z_x(x(s, t), y(s, t))x_s(s, t) + z_y(x(s, t), y(s, t))y_s(s, t))h \\ &\quad + (z_x(x(s, t), y(s, t))x_t(s, t) + z_y(x(s, t), y(s, t))y_t(s, t))k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned} \quad (2)$$

に対し $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立することが分かれば、式 (1) と式 (2) とを比較して

$$z_s(x(s,t), y(s,t)) = z_x(x(s,t), y(s,t))x_s(s,t) + z_y(x(s,t), y(s,t))y_s(s,t)$$

$$z_t(x(s,t), y(s,t)) = z_x(x(s,t), y(s,t))x_t(s,t) + z_y(x(s,t), y(s,t))y_t(s,t)$$

が成立することが分かる。よって式 (2) の成立を示す。

$z = z(x, y)$ および $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ は微分可能なので、

$$x(s+h, t+k) = x(s, t) + x_s(s, t)h + x_t(s, t)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (3)$$

$$y(s+h, t+k) = y(s, t) + y_s(s, t)h + y_t(s, t)k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (4)$$

$$z(x+h, y+k) = z(x, y) + z_x(x, y)h + z_y(x, y)k + \varepsilon_3(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \quad (5)$$

が成立している。

$$H = x_s(s, t)h + x_t(s, t)k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$K = y_s(s, t)h + y_t(s, t)k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

とおくと、 $x(s+h, t+k) = x(s, t) + H$, $y(s+h, t+k) = y(s, t) + K$ が成立している。これを $z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k))$ に代入して (5) を用いて変形すると (式が長くなるので、 $z = z(x, y)$, $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z_x = z_x(s, t)$, $z_y = z_y(s, t)$, $x_s = x_s(s, t)$, $x_t = x_t(s, t)$, $y_s = y_s(s, t)$, $y_t = y_t(s, t)$ と略記する) 、

$$\begin{aligned} z(x(s+h, t+k), y(s+h, t+k)) &= z(x(s, t) + H, y(s, t) + K) \\ &= z + z_x H + z_y K + \varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2} \\ &= z + z_x (x_s h + x_t k + \varepsilon_1(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}) + z_y (y_s h + y_t k + \varepsilon_2(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}) + \varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2} \\ &= z + (z_x x_s + z_y y_s) h + (z_x x_t + z_y y_t) k + \left(z_x \varepsilon_1(h, k) + z_y \varepsilon_2(h, k) + \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) \sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\varepsilon(h, k) = z_x \varepsilon_1(h, k) + z_y \varepsilon_2(h, k) + \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

とおく。 $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ を示せば、定理が示される。

$(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(h, k) = 0$ かつ $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(h, k) = 0$ が成立するので、

$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_3(H, K)\sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ を示せばよい。

$(h, k) \rightarrow (0, 0)$ のとき $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} H = 0$ および $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} K = 0$ が成立するので、

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_3(H, K) = 0$$

が成立することに注意しておく。また

$$|h| \leq \sqrt{h^2 + k^2}, \quad |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$$

が成立することにも注意しておく。簡単のため $x_s(s, t), x_t(s, t), y_s(s, t), y_t(s, t), \varepsilon_1(h, k), \varepsilon_2(h, k)$ をそれぞれ $x_s, x_t, y_s, y_t, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ と略記すると,

$$H = x_s h + x_t k + \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$K = y_s h + y_t k + \varepsilon_2 \sqrt{h^2 + k^2}$$

と書ける。

$$\begin{aligned} H^2 &= (x_s h + x_t k + \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2})^2 \\ &= x_s^2 h^2 + x_t^2 k^2 + \varepsilon_1^2 (h^2 + k^2) + 2x_s h x_t k + 2x_s h \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2} + 2x_t k \varepsilon_1 \sqrt{h^2 + k^2} \\ &\leq x_s^2 h^2 + x_t^2 k^2 + \varepsilon_1^2 (h^2 + k^2) + 2|x_s||x_t||h||k| + 2|x_s||\varepsilon_1||h|\sqrt{h^2 + k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1||k|\sqrt{h^2 + k^2} \\ &\leq x_s^2 (h^2 + k^2) + x_t^2 (h^2 + k^2) + \varepsilon_1^2 (h^2 + k^2) + 2|x_s||x_t|(h^2 + k^2) \\ &\quad + 2|x_s||\varepsilon_1|\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2} + 2|x_t||\varepsilon_1|\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2} \\ &= (x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|) (h^2 + k^2) \end{aligned}$$

となるので $S = x_s^2 + x_t^2 + \varepsilon_1^2 + 2|x_s||x_t| + 2|x_s||\varepsilon_1| + 2|x_t||\varepsilon_1|$ とおくと $H^2 \leq S(h^2 + k^2)$ が得られる。同様の議論で $T = y_s^2 + y_t^2 + \varepsilon_2^2 + 2|y_s||y_t| + 2|y_s||\varepsilon_2| + 2|y_t||\varepsilon_2|$ とおくと $K^2 \leq T(h^2 + k^2)$ が得られる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon(H, K) \sqrt{H^2 + K^2}}{h^2 + k^2} \right| &\leq |\varepsilon(H, K)| \frac{\sqrt{S(h^2 + k^2) + T(h^2 + k^2)}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= |\varepsilon(H, K)| \frac{\sqrt{S + T} \sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= |\varepsilon(H, K)| \sqrt{S + T} \end{aligned}$$

から $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_3(H, K) \sqrt{H^2 + K^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ が成立することが分かる。

演習問題 2.9 次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(2) $z = (x^3 + y^4)^{100}$

(3) $z = \frac{x - y}{2x + 3y}$

(4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(5) $e^{ax^2 + by^2}$

(6) $z = x \arctan \frac{x}{y}$

(7) $z = xy \sin(x^2 + y^2)$

(8) $z = x^2 y^2 \log(x^3 + y^3)$

(9) $z = xy \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(10) $z = x^x y^y x^y y^x$

x に関する偏導関数は, y を定数として x に関する 1 変数関数と見て微分すれば求まる。よって 1 変数関数の色々な定理を用いて計算することができる。ここでは結果のみ記しておく。

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 300(x^3 + y^4)^{99} x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 400(x^3 + y^4)^{99} y^3$

- (3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5y}{(2x+3y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5x}{(2x+3y)^2}$
- (4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- (5) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2axe^{ax^2+by^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2b ye^{ax^2+by^2}$
- (6) $\frac{\partial z}{\partial x} = \arctan \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{x^2+y^2}$
- (7) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \sin(x^2+y^2) + 2x^2y \cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \sin(x^2+y^2) + 2xy^2 \cos(x^2+y^2)$
- (8) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \log(x^3+y^3) + \frac{3x^4y^2}{x^3+y^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y \log(x^3+y^3) + \frac{3x^2y^4}{x^3+y^3}$
- (9) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \arcsin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \arcsin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$
- (10)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^x(\log x + 1)y^x x^y y^x + x^x y^y x^{y-1} y^{x+1} + x^x y^y x^y y^x \log y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^x y^y(\log y + 1)x^y y^x + x^x y^y x^{y+1} y^{x-1} + x^x y^y x^y y^x \log x$$

演習問題 2.10 次の関数について z_s, z_t および $z_{ss}, z_{st}, z_{ts}, z_{tt}$ を求めよ。

- (1) $z = \sin x \cos y, x = s^2 - t^2, y = 2st$
- (2) $z = \sin(x^2 + y^2), x = s + t, y = st$
- (3) $z = \sin(x + 2y), x = \frac{t}{s}, y = \frac{s}{t}$

- (1) $z_x = \cos x \cos y, z_y = -\sin x \sin y, x_s = 2s, x_t = -2t, y_s = 2t, y_t = 2s$ なので

$$\begin{aligned} z_s &= z_x x_s + z_y y_s = \cos x \cos y \cdot 2s - \sin x \sin y \cdot 2t \\ &= 2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y \\ z_t &= z_x x_t + z_y y_t = \cos x \cos y \cdot (-2t) - \sin x \sin y \cdot 2s \\ &= -2t \cos x \cos y - 2s \sin x \sin y \end{aligned}$$

となる。これを更に s および t で微分すると

$$\begin{aligned} z_{ss} &= (z_s)_s = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_s \\ &= (2s \cos x \cos y)_s - (2t \sin x \sin y)_s \\ &= (2s)_s \cos x \cos y + 2s (\cos x \cos y)_s - 2t (\sin x \sin y)_s \\ &= 2 \cos x \cos y + 2s (\cos x)_s \cos y + 2s \cos x (\cos y)_s - 2t (\sin x)_s \sin y - 2t \sin x (\sin y)_s \\ &= 2 \cos x \cos y - 2s \sin x \cdot 2s \cos y - 2s \cos x \sin y \cdot (2t) - 2t \cos x \cdot 2s \sin y - 2t \sin x \cos y \cdot (2t) \\ &= 2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y - 8st \cos x \sin y \\ z_{st} &= (z_s)_t = (2s \cos x \cos y - 2t \sin x \sin y)_t \\ &= (2s \cos x \cos y)_t - (2t \sin x \sin y)_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2s(\cos x \cos y)_t - (2t)_t \sin x \sin y - 2t(\sin x \sin y)_t \\
&= 2s(\cos x)_t \cos y + 2s \cos x (\cos y)_t - 2 \sin x \sin y - 2t(\sin x)_t \sin y - 2t \sin x (\sin y)_t \\
&= -2 \sin x \sin y + 4(t^2 - s^2) \cos x \sin y
\end{aligned}$$

以下同様に計算して

$$\begin{aligned}
z_{ts} &= -2 \sin x \sin y + 4(t^2 - s^2) \cos x \sin y \\
z_{tt} &= -2 \cos x \cos y - 4(s^2 + t^2) \sin x \cos y + 8st \cos x \sin y
\end{aligned}$$

を得る。

以下は結果のみを記す。

(2)

$$\begin{aligned}
z_s &= 2(s + t + st^2) \cos(x^2 + y^2) \\
z_t &= 2(s + t + s^2t) \cos(x^2 + y^2) \\
z_{ss} &= 2(1 + t^2) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + st^2)^2 \sin(x^2 + y^2) \\
z_{st} &= 2(1 + 2st) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + st^2)(s + t + s^2t) \sin(x^2 + y^2) \\
z_{ts} &= 2(1 + 2st) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + st^2)(s + t + s^2t) \sin(x^2 + y^2) \\
z_{tt} &= 2(1 + s^2) \cos(x^2 + y^2) - 4(s + t + s^2t)^2 \sin(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
z_s &= \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2} \right) \cos(x + 2y) \\
z_t &= \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2} \right) \cos(x + 2y) \\
z_{ss} &= \frac{2t}{s^3} \cos(x + 2y) - \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2} \right)^2 \sin(x + 2y) \\
z_{st} &= - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2} \right) \cos(x + 2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2} \right) \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2} \right) \sin(x + 2y) \\
z_{ts} &= - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{t^2} \right) \cos(x + 2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2} \right) \left(\frac{2}{t} - \frac{t}{s^2} \right) \sin(x + 2y) \\
z_{tt} &= \frac{4s}{t^3} \cos(x + 2y) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{t^2} \right)^2 \sin(x + 2y)
\end{aligned}$$

演習問題 2.11 定理 2.13 から定理 2.15 を導け。

定理 2.13 より

$$\begin{aligned}
x_s &= x_u u_s + x_v v_s & x_t &= x_u u_t + x_v v_t \\
y_s &= y_u u_s + y_v v_s & y_t &= y_u u_t + y_v v_t
\end{aligned}$$

が成立する。これを行列の形に書き直すと

$$\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

となり

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(s, t)}$$

が得られる。

2 変数関数 2 個の組

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

が 2 つありお互いに逆関数になっているとき

$$\begin{aligned} x(u(x, y), v(x, y)) &= x & u(x(u, v), y(u, v)) &= u \\ y(u(x, y), v(x, y)) &= y & v(x(u, v), y(u, v)) &= v \end{aligned}$$

となっている。これに今証明したことを適用すると

$$\frac{D(x, y)}{D(x, y)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

なるが

$$\frac{D(x, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^{-1}$$

となる。

演習問題 2.12 次の場合に $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 及び $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = u^2$

(2) $x = u^2 - v^2, y = 2uv$

(3) $x = u \cos v, y = u \sin v$

(4) $x = u, y = u + v$

$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を直接求めることは難しいので、最初に $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ を求めて、逆行列を求めることにより、 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ を求める。

ヤコビ行列は変数の順序が変わると別のヤコビ行列になる。順序を間違えないこと。 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ でいうと、独立変数が左から右へ u, v 、従属変数は縦で上から下に x, y となる。

逆行列の求め方があやふやな人は必ず検算をすること。 A が与えられた行列で B が求めた逆行列とするとき、正しければ AB は単位行列になる。

(1) $\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \frac{\partial x}{\partial v} = 2v, \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \frac{\partial y}{\partial v} = 0$ なので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 2u & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2u} \\ \frac{1}{2v} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}, \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

$$(3) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}, \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix}$$

$$(4) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の求め方が分からない人 (またはすぐ忘れる人) へ: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられた。これを忘れたときは次の様に定義に基づいて逆行列を計算して求めてもよい。

$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと, $AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より p, q, r, s に関する連立 1 次方程式 (p, q, r, s が未知数で, a, b, c, d は既知数)

$$ap + br = 1, aq + bs = 0, cp + dr = 0, cq + ds = 1$$

を得る。これを解くと $p = \frac{d}{ad - bc}, q = \frac{-b}{ad - bc}, r = \frac{-c}{ad - bc}, s = \frac{a}{ad - bc}$ が分かる。

演習問題 2.13 次の関数に対し $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

(1) $z = x + y^2, s = x + y, t = xy$

(2) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2 y^2$

(3) $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = xy$

(4) $z = x + y, s = x^2 - y^2, t = 2xy$

(5) $z = xy, s = x, t = x + y$

(6) $z = xy, s = x \cos y, t = x \sin y$

スペース節約のため 2 次導関数は行列の形で表現しているが、行列で表現しなければいけないというわけでは勿論ない。

(1) $\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x-y} & -\frac{1}{x-y} \\ -\frac{y}{x-y} & \frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x,y)} = (1 \ 2y)$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \ \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \frac{D(z)}{D(x,y)} \frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \ \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} x-2y^2 & -1+2y \\ x-y & x-y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{y(-1+2y)}{(x-y)^2} & -\frac{4xy-2y^2-x}{(x-y)^2} \\ -\frac{-1+2y}{(x-y)^2} & \frac{2x-1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s,t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} \frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y(-x+3xy-y^2)}{(x-y)^3} & -\frac{-x+4xy-y}{(x-y)^3} \\ -\frac{-x+4xy-y}{(x-y)^3} & \frac{2(-1+y+x)}{(x-y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(2) $\frac{D(s,y)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ は $\frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2-y^2)} & -\frac{1}{2x(x^2-y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2-y^2)} & \frac{1}{2y(x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x,y)} = (1 \ 1)$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \ \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \frac{D(z)}{D(x,y)} \frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \ \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s,t)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(x+y) & 2(x+y)xy \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+y)^2} & -\frac{1}{2(x+y)^2} \\ -\frac{2x+y}{2(x+y)^2 x^2 y} & -\frac{2y+x}{2(x+y)^2 x y^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4(x+y)^3} & -\frac{1}{4(x+y)^3 xy} \\ -\frac{1}{4(x+y)^3 xy} & -\frac{x^2 + 3xy + y^2}{4(x+y)^3 y^3 x^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(3) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 - y^2)} & -\frac{y}{x^2 - y^2} \\ -\frac{y}{2(x^2 - y^2)} & \frac{x}{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(x+y)} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2(x+y)^2} & -\frac{1}{2(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4(x+y)^3} & -\frac{1}{2(x+y)^3} \\ -\frac{1}{2(x+y)^3} & -\frac{1}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(4) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(x^2 + y^2)} & \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2(x^2 + y^2)} & \frac{x+y}{2(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} & -\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3x^2y + y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} & -\frac{3x^2y - y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} \\ -\frac{3x^2y - y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} & \frac{-3x^2y + y^3 - 3xy^2 + x^3}{4(x^2 + y^2)^3} \end{pmatrix}$$

を得る。

(5) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} y - x & x \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(6) $\frac{D(s, y)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$ である。 $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ は $\frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ の逆行列なので

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\frac{\sin y}{x} & \frac{\cos y}{x} \end{pmatrix}$$

となる。一方 $\frac{D(z)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$ であり、 $\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \frac{D(z)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ なので

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{D(z)}{D(s, t)} = \begin{pmatrix} y \cos y - \sin y & y \sin y + \cos y \end{pmatrix}$$

である。また

$$\frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & -y \sin y \\ 0 & y \cos y \end{pmatrix}$$

が成立している。 $\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(s, t)} = \frac{D(z_s, z_t)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(s, t)}$ に代入して

$$\begin{pmatrix} z_{ss} & z_{st} \\ z_{ts} & z_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y \sin^2 y}{x} & -\frac{y \sin y \cos y}{x} \\ -\frac{y \sin y \cos y}{x} & \frac{y \cos^2 y}{x} \end{pmatrix}$$

を得る。

演習問題 2.14 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とする (2次元の極座標表示)。ヤコビ行列 $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$ およ

びヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を計算し, 関数 $z = f(x, y)$ に対し次を示せ。

$$(1) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

$$\text{ヤコビ行列は } \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ である。 } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta \times r \cos \theta - (-r \sin \theta) \times \sin \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

である。

$$(1) \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \text{ なので}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta \quad (6)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cos^2 \theta \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。

(2) 式 (6) より

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \sin \theta$$

となるが、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin \theta$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

を得る。計算の途中で $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を使った。

同様に式 (6) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) r \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) r \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial y} r \sin \theta \end{aligned}$$

となるが、

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r \cos \theta$$

を代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial z}{\partial x} r \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial y} r \sin \theta$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \end{aligned}$$

を得る。

演習問題 2.15

(1) $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha, y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ (α は定数) のとき次を示せ。

$$(1) z_x^2 + z_y^2 = z_u^2 + z_v^2$$

$$(2) z_{xx} + z_{yy} = z_{uu} + z_{vv}$$

(2) $x + y = e^{u+v}, x - y = e^{u-v}$ に対し $z_{xx} - z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} - z_{vv})$ が成立することを示せ。

(3) $x + y = u, y = uv$ ならば $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = uz_{uu} - vz_{uv} + z_u$ となる事を示せ。

(1) x を u で微分すると $x_u = \cos \alpha, v$ で微分すると $x_v = -\sin \alpha$ を得る。同様に $y_u = \sin \alpha, y_v = \cos \alpha$ となる。合成関数の微分法より

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

が得られる。これを用いて $z_u^2 + z_v^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} z_u^2 + z_v^2 &= (z_x \cos \alpha - z_y \sin \alpha)^2 + (z_x \sin \alpha + z_y \cos \alpha)^2 \\ &= z_x^2 \cos^2 \alpha - 2z_x z_y \cos \alpha \sin \alpha + z_y^2 \sin^2 \alpha + z_x^2 + 2z_x z_y \sin \alpha \cos \alpha + z_y^2 \cos^2 \alpha \\ &= z_x^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_y^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= z_x^2 + z_y^2 \end{aligned}$$

となる。

$z_u = z_x x_u + z_y y_u$ を u で微分すると、積の微分法より

$$(z_u)_u = (z_x)_u x_u + z_x (x_u)_u + (z_y)_u y_u + z_y (y_u)_u$$

となる。 x_u, y_u は定数なので $(x_u)_u = 0, (y_u)_u = 0$ である。また $(z_x)_u, (z_y)_u$ に合成関数の微分法をもう一度適用すると、 $(z_x)_u = (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u, (z_y)_u = (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u$ となる。よってこれらを前式に代入すると

$$z_{uu} = z_{xx} x_u^2 + 2z_{xy} x_u y_u + z_{yy} y_u^2 = z_{xx} \cos^2 \alpha + 2z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \sin^2 \alpha$$

が得られる。ただし計算途中で $z_{xy} = z_{yx}$ を使用した。同様に z_{vv} を計算すると

$$z_{vv} = z_{xx} \sin^2 \alpha - 2z_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + z_{yy} \cos^2 \alpha$$

となり、これらを加えると

$$z_{uu} + z_{vv} = z_{xx} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + z_{yy} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = z_{xx} + z_{yy}$$

となる。

(2) $x = \frac{e^{u+v} + e^{u-v}}{2}, y = \frac{e^{u+v} - e^{u-v}}{2}$ なので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

となる。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x x + z_y y$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{uu} &= \frac{\partial}{\partial u} (z_x x) + \frac{\partial}{\partial u} (z_y y) \\
 &= (z_x)_u x + z_x x_u + (z_y)_u y + z_y y_u \\
 &= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u) x + z_x x + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) y + z_y y \\
 &= z_{xx} x^2 + 2z_{xy} xy + z_{yy} y^2 + z_x x + z_y y
 \end{aligned}$$

となる。

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = z_x y + z_y x$$

を v で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{vv} &= (z_x)_v y + z_x y_v + (z_y)_v x + z_y x_v \\
 &= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v) y + z_x x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v) x + z_y y \\
 &= z_{xx} y^2 + 2z_{xy} xy + z_{yy} x^2 + z_x x + z_y y
 \end{aligned}$$

となる。よって $z_{uu} - z_{vv} = (z_{xx} - z_{yy})(x^2 - y^2)$ となるが、 $x^2 - y^2 = e^{2u}$ なので式が証明された。

(3) $x = u - y = u - uv$ なので

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}$$

である。

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = z_x(1-v) + z_y v$$

を u で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{uu} &= (z_x)_u(1-v) + (z_y)_u v \\
 &= (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u)(1-v) + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) v \\
 &= z_{xx}(1-v)^2 + 2z_{xy} u(1-v) + z_{yy} v^2
 \end{aligned}$$

であり、 z_u を v で微分すると

$$\begin{aligned}
 z_{uv} &= (z_x)_v(1-v) + z_x(1-v)_v + (z_y)_v v + z_y v_v \\
 &= (z_{xx} x_v + z_{xy} y_v)(1-v) - z_x + (z_{yx} x_v + z_{yy} y_v) v + z_y \\
 &= -z_{xx} u(1-v) + z_{xy} u(1-v) - z_{xy} uv + z_{yy} uv - z_x + z_y
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 uz_{uu} - vz_{uv} + z_u &= z_{xx} u(1-v)^2 + 2z_{xy} uv(1-v) + z_{yy} uv^2 + z_{xx} uv(1-v) - z_{xy} uv(1-v) \\
 &\quad + z_{xy} uv^2 - z_{yy} uv^2 + z_x v - z_y v + z_x(1-v) + z_y v \\
 &= z_{xx} u(1-v) + z_{xy} uv + z_x \\
 &= xz_{xx} + yz_{xy} + z_x
 \end{aligned}$$

が得られる。

演習問題 2.16 次の関数の偏導関数を求めよ。

(1) $w = f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$

(2) $w = xyz \sin(x^2 + y^2 + z^2)$

(3) $e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $x^2 y^3 \log(x^2 + y^3 + z^4)$

(1) $\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3z^4, \frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2z^4, \frac{\partial w}{\partial z} = 4x^2y^3z^3$

(2) $\frac{\partial w}{\partial x} = yz \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^2yz \cos(x^2 + y^2 + z^2),$

$\frac{\partial w}{\partial y} = xz \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy^2z \cos(x^2 + y^2 + z^2),$

$\frac{\partial w}{\partial z} = xy \sin(x^2 + y^2 + z^2) + 2xyz^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2)$

(3) $\frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^3+z^4}, \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2e^{x^2+y^3+z^4}, \frac{\partial w}{\partial z} = 4z^3e^{x^2+y^3+z^4}$

(4) $\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 \log(x^2 + y^3 + z^4) + \frac{2x^3y^2}{x^2 + y^3 + z^4},$

$\frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 \log(x^2 + y^3 + z^4) + \frac{3x^2y^5}{x^2 + y^3 + z^4},$

$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{4x^2y^3z^3}{x^2 + y^3 + z^4}$

演習問題 2.17 次の場合に $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ 及び $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ を求めよ。

(1) $x = v^2, y = w^2, z = u^2$

(2) $x = u^2 - v^2 + w^2, y = 2uv, z = 2uw$

(3) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u + w$

(4) $x = u, y = u + v, z = u + v + w$

(1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) のみ逆行列を求める計算を記す。ここでは線型代数の知識はないとして直接計算で求めている。線型代数において学んだ逆行列の求め方を知っているものは勿論それを用いて計算してよい。

逆行列を $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 2u & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ は連立 1 次方程式

$$2vd = 1, 2ve = 0, 2vf = 0, 2wg = 0, 2wh = 1, 2wi = 0, 2ua = 0, 2ub = 0, 2uc = 1$$

の解なので，連立1次方程式を解くと

$$a = 0, b = 0, c = \frac{1}{2u}, d = \frac{1}{2v}, e = 0, f = 0, g = 0, h = \frac{1}{2w}, i = 0$$

が得られる (ここで $u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0$ として計算した)。よって

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2u} \\ \frac{1}{2v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2w} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(2)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v & 2w \\ 2v & 2u & 0 \\ 2w & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{u}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & \frac{v}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & -\frac{w}{2(u^2 + v^2 - w^2)} \\ -\frac{v}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & \frac{u^2 - w^2}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} & -\frac{vw}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} \\ -\frac{w}{2(u^2 + v^2 - w^2)} & -\frac{vw}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} & \frac{u^2 + v^2}{2u(u^2 + v^2 - w^2)} \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v & 0 \\ \sin v & u \cos v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(4)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

演習問題 2.18 次の関数に対し $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$ を求めよ。

$$(1) w = x^3 + y^3 + z^3, x + y + z = s, xy + yz + zx = t, xyz = u$$

$$(2) w = x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = s, xyz = t, xy + yz + zx = u$$

(1)

$$\frac{D(s, t, u)}{D(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(s, t, u)} = \left(\frac{D(s, t, u)}{D(x, y, z)} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} & -\frac{x}{(x-y)(x-z)} & \frac{1}{(x-y)(x-z)} \\ \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} & -\frac{y}{(y-z)(y-x)} & \frac{1}{(y-z)(y-x)} \\ \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} & -\frac{z}{(z-x)(z-y)} & \frac{1}{(z-x)(z-y)} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3zx + 3yz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -3x - 3y - 3z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。 $X = \frac{\partial w}{\partial s}$ とおき，これに合成関数の微分法を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= \frac{\partial X}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 6x + 6y + 6z\end{aligned}$$

が得られる。同様に計算して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w_t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial w_t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} &= \frac{\partial w_u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w_u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 0\end{aligned}$$

(2) この問題は x, y, z に関する対称式 (x, y, z を入れ換えても式が変わらない) に関係しているので，変数間に特殊な関係が存在する。ここではそのことを使って解く方法を紹介する。勿論 (1) と同様に方法で解いてもよい。

$$\begin{aligned}w^2 &= (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ &= s + 2u\end{aligned}$$

が成立している。両辺を s で微分すると，

$$\frac{\partial w^2}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial s} + 2 \frac{\partial u}{\partial s}$$

となる。 s で微分するとき t, u は固定されているので

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial s} = 1$$

である。 $\frac{\partial w^2}{\partial s} = 2w \frac{\partial w}{\partial s}$ なので $2w \frac{\partial w}{\partial s} = 1$ より

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2(x + y + z)}$$

となる。 $w^2 = s + 2u$ を t で微分すると

$$\frac{\partial w^2}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

となる。 $\frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ より

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

となる。 $w^2 = s + 2u$ を u で微分すると,

$$\frac{\partial w^2}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial u} + 2 \frac{\partial u}{\partial u}$$

となる。 $\frac{\partial s}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial u} = 1$ である。 $\frac{\partial w^2}{\partial u} = 2w \frac{\partial w}{\partial u}$ なので

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{1}{w} = \frac{1}{x + y + z}$$

となる。

$2ww_s = 1$ の両辺を s で微分すると $2w_s w_s + 2w w_{ss} = 0$ を得るので

$$\begin{aligned} w_{ss} &= -\frac{w_s^2}{w} = -\frac{1}{w} \left(\frac{1}{2w} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4(x + y + z)^3} \end{aligned}$$

$w_t = 0$ なので $w_{tt} = 0$, $w_{ts} = 0$ である。また $ww_u = 1$ の両辺を u で微分すると $w_u w_u + ww_{uu} = 0$ を得るので,

$$\begin{aligned} w_{uu} &= -\frac{w_u^2}{w} = -\frac{1}{w} \left(\frac{1}{w} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{(x + y + z)^3} \end{aligned}$$

となる。

(1) の問題もここで紹介した方法を用いて計算できる。興味のあるものは試みよ。

演習問題 2.19 $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ とする (3次元の極座標表示)。関数 $w = f(x, y, z)$ に対し次を示せ。

(1) ヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を計算せよ。

$$(2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$(3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

3次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対しその行列式は

$$\det A = aei + dhc + gbh - gec - dbi - ahf$$

であるということは知っているとする。

(1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det \left(\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} \right) = r^2 \sin \theta$$

となる。

(2)

$$\frac{D(w)}{D(r, \theta, \varphi)} = \frac{D(w)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} r \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial z} r \sin \theta \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} r \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} r \sin \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial z} \sin \theta \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \varphi \end{aligned}$$

となるので, 各式を2乗して加えると

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

が成立する。

(3) $w_r = w_x x_r + w_y y_r + w_z z_r$ を r で微分して

$$\begin{aligned} w_{rr} &= (w_x)_r x_r + w_x x_{rr} + (w_y)_r y_r + w_y y_{rr} + (w_z)_r z_r + w_z z_{rr} \\ &= (w_{xx} x_r + w_{xy} y_r + w_{xz} z_r) x_r + w_x x_{rr} + (w_{yx} x_r + w_{yy} y_r + w_{yz} z_r) y_r \\ &\quad + w_y y_{rr} + (w_{zx} x_r + w_{zy} y_r + w_{zz} z_r) z_r + w_z z_{rr} \\ &= w_{xx} x_r^2 + w_{yy} y_r^2 + w_{zz} z_r^2 + 2w_{xy} x_r y_r + 2w_{yz} y_r z_r + 2w_{xz} x_r z_r + w_x x_{rr} + w_y y_{rr} + w_z z_{rr} \end{aligned}$$

を得る。同様に $w_{\varphi\varphi}(\sin\theta w_\theta)_\theta$ を計算し、 $w_{rr} + \frac{2}{r}w_r + \frac{1}{r^2\sin\theta} + (\sin\theta w_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}w_{\varphi\varphi}$ の計算を実行すると求める式が得られる。