

演習問題 2.25 (a, b) で f が (広義の) 極小値をとるならば, (a, b) は f の臨界点であることを示せ。

(a, b) で f が広義の極小値をとるので十分小さい (0 に近い) h と k に対して, $f(a, b) \leq f(a + h, b + k)$ が成立している。 $h > 0$ のとき $\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$ より

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \geq 0$$

が成立する。また $h < 0$ のとき $\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$ より

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \leq 0$$

が成立する。よって $f_x(a, b) = 0$ である。

$k > 0$ のとき $\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \geq 0$ より

$$f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \geq 0$$

が成立する。また $k < 0$ のとき $\frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \leq 0$ より

$$f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow -0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} \leq 0$$

が成立する。よって $f_y(a, b) = 0$ である。よって (a, b) は f の臨界点である。

演習問題 2.26 2 次関数 $z = f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ に対して定理 2.26 が成立することを示せ。(ヒント: $y \neq 0$ のとき関数を y^2 で割って, $t = \frac{x}{y}$ とおくと, 2 次関数の判別式が使える。)

$$z_x = 2Ax + 2By, \quad z_y = 2Bx + 2Cy, \quad z_{xx} = 2A, \quad z_{xy} = 2B, \quad z_{yy} = 2C$$

$(x, y) = (0, 0)$ は臨界点であり, $f(0, 0) = 0$ である。ヘッシアンは

$$H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4(AC - B^2)$$

となる。最初に $H > 0$ かつ $A > 0$ の場合を考える。 $y = 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2$ となるので, $x \neq 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2 > 0 = f(0, 0)$ となっている。 $y \neq 0$ のとき $\frac{1}{y^2}f(x, y) = A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\frac{x}{y}\right) + C$ である。 $g(t) = At^2 + 2Bt + C$ とおくと, H は $g(t) = 0$ の判別式の符号を逆にしたものなので, $H > 0$ かつ $A > 0$ より, 任意の t に対し $g(t) > 0$ が成立する。よって $\frac{1}{y^2}f(x, y) > 0$

となり, $f(x, y) > 0$ が得られる。以上により $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) > f(0, 0)$ なので $(0, 0)$ で極小値をとる。

次に $H > 0$ かつ $A < 0$ のときを考える。 $y = 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2$ となるので, $x \neq 0$ のとき $f(x, 0) = Ax^2 < 0 = f(0, 0)$ となっている。 $y \neq 0$ のとき $\frac{1}{y^2}f(x, y) = A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2B\left(\frac{x}{y}\right) + C$ である。 $g(t) = At^2 + 2Bt + C$ とおくと, H は $g(t) = 0$ の判別式の符号を逆にしたものである。 $H > 0$ かつ $A < 0$ より, 任意の t に対し $g(t) < 0$ が成立する。 よって $\frac{1}{y^2}f(x, y) < 0$ となり, $f(x, y) < 0$ が得られる。以上により $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) < f(0, 0)$ なので $(0, 0)$ で極大値をとる。

最後に $H < 0$ のときを考える。 $y \neq 0$ として $t = \frac{x}{y}$ に対し $g(t) = At^2 + 2Bt + C$ を考える。 $H < 0$ なのでこのグラフは x 軸と交わる。 よって $g(t)$ は正の値も負の値もとる。 即ち $\exists t_1 g(t_1) > 0$ かつ $\exists t_2 g(t_2) < 0$ が成立する。 このとき $t_1 = \frac{x_1}{y_1}$ となる (x_1, y_1) に対して $f(x_1, y_1) = \frac{1}{y_1^2}g(t_1) > 0$ となるので, $f(x_1, y_1) > 0$ となる。 y_1 を充分小さくとると (x_1, y_1) は原点に充分近い。 $t_2 = \frac{x_2}{y_2}$ となる (x_2, y_2) に対して $f(x_2, y_2) = \frac{1}{y_2^2}g(t_2) < 0$ となるので, $f(x_2, y_2) < 0$ となる。 y_2 を充分小さくとると (x_2, y_2) は原点に充分近い。 $(0, 0)$ にいくらでも近いところに $f(x_1, y_1) > 0$ となる点 (x_1, y_1) と $f(x_2, y_2) < 0$ となる点 (x_2, y_2) が存在するので $(0, 0)$ は極値ではない。

演習問題 *2.27 定理 2.26 を証明せよ。

式が長くなるので $f_{xy}(a, b)$ 等を f_{xy} , $f_{xy}(a + \theta h, b + \theta k)$ 等を $f_{xy}(\theta)$ と略記する。 テーラーの定理より

$$R_3 = \frac{1}{3!} (h^3 f_{xxx}(\theta) + 3h^2 k f_{xxy}(\theta) + 3hk^2 f_{xyy}(\theta) + k^3 f_{yyy}(\theta))$$

とおくと

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x + kf_y + \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) + R_3$$

となる θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $F_2 = \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})$ とおくと, $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ より

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = F_2 + R_3$$

となる。

$H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ の場合を考える。 F_2 は h, k に関する 2 次式なので, 演習問題 2.26 より原点の近くで $F_2 > 0$ となっている。 $F_2 + R_3 > 0$ が示されれば極小であることが分かる。

(h, k) に対し $r = \sqrt{h^2 + k^2}$ とし,

$$h = ru, \quad k = rv$$

とおくと (u, v) は半径 1 の円周上の点である。

$$F_2 = r^2 \frac{1}{2} (u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy})$$

$$R_3 = r^3 \frac{1}{6} (u^3 f_{xxx}(\theta) + 3u^2 v f_{xxy}(\theta) + 3uv^2 f_{xyy}(\theta) + v^3 f_{yyy}(\theta))$$

より

$$G_2(u, v) = \frac{1}{2} (u^2 f_{xx} + 2uv f_{xy} + v^2 f_{yy})$$

$$G_3(u, v) = \frac{1}{6} (u^3 f_{xxx}(\theta) + 3u^2 v f_{xxy}(\theta) + 3uv^2 f_{xyy}(\theta) + v^3 f_{yyy}(\theta))$$

とおく。\$G_2\$ は \$r\$ に依存しないが、\$G_3\$ は \$\theta\$ が \$r\$ に依存するので、\$r\$ に依存することを注意しておく。\$(u, v)\$ は半径 1 の円周上を動く。円周は有界閉集合なので、最大値定理より \$G_2(u, v)\$ は最小値 \$M_2\$ をとる。このとき任意の \$(u, v)\$ に対し \$G_2 \ge M_2\$ が成立する。\$G_2\$ も 2 次式で \$F_2\$ と同じ条件を満たすので \$G_2 > 0\$ であり、\$M_2 > 0\$ である。充分小さな \$\delta > 0\$ に対し

$$N = \max \{ |f_{xxx}(a, y)|, |f_{xxy}(x, y)|, |f_{xyy}(x, y)|, |f_{yyy}(x, y)| \mid d((x, y), (a, b)) \le \delta \}$$

とおくと

$$|G_3| \le \frac{1}{6} (|u|^3 N + 3|u|^2 |v| N + 3|u| |v|^2 N + |v|^3 N)$$

$$= \frac{N}{6} (|u| + |v|)^3$$

となるが \$\frac{N}{6} (|u| + |v|)^3\$ も連続関数なので最大値 \$M_3\$ が存在する。\$r\$ を \$M_3 r < M_2\$ が成立するように十分小さくとると、

$$F_2 + R_3 = r^2 G_2 + r^3 G_3 \ge r^2 G_2 - r^3 |G_3|$$

$$\ge r^2 M_2 - r^3 M_3 = r^2 (M_2 - r M_3) > 0$$

次に \$H(a, b) > 0\$ かつ \$f_{xx}(a, b) < 0\$ のときを考える。\$F_2\$ は \$h, k\$ に関する 2 次式なので、演習問題 2.26 より原点の近くで \$F_2 < 0\$ となっている。\$F_2 + R_3 < 0\$ が示されれば極大であることが分かる。

\$r, u, v, G_2, G_3, N, M_3\$ を先程と同じものとする。最大値定理より \$G_2(u, v)\$ は最大値 \$N_2\$ をとる。このとき任意の \$(u, v)\$ に対し \$G_2 \le N_2\$ が成立する。\$G_2\$ も 2 次式で \$F_2\$ と同じ条件を満たすので \$G_2 < 0\$ であり、\$N_2 < 0\$ である。\$r\$ を \$M_3 r < -N_2\$ が成立するように十分小さくとると、

$$F_2 + R_3 = r^2 G_2 + r^3 G_3 \le r^2 G_2 + r^3 |G_3|$$

$$\le r^2 N_2 + r^3 M_3 = r^2 (N_2 - r M_3) < 0$$

最後に \$H(a, b) < 0\$ の場合を考える。演習問題 2.26 より半径 1 の円周上の点 \$(u_1, v_1), (u_2, v_2)\$ で \$G_2(u_1, v_1) > 0, G_2(u_2, v_2) < 0\$ となる点が存在する。\$r\$ を十分小さくとして

$$r M_3 < G_2(u_1, v_1), \quad r M_3 < -G_2(u_2, v_2)$$

の両方が成立するようにしておく。このとき \$(x_1, y_1) = (ru_1, rv_1), (x_2, y_2) = (ru_2, rv_2)\$ とおくと

$$F_2(x_1, y_1) + R_3(x_1, y_1) \ge r^2 G(u_1, v_1) - r^3 M_3 \ge r^2 (G(u_1, v_1) - r M_3) > 0$$

$$F_2(x_2, y_2) + R_3(x_2, y_2) \le r^2 G(u_2, v_2) + r^3 M_3 \le r^2 (G(u_2, v_2) + r M_3) < 0$$

となるので \$(a, b)\$ は極点ではない。

演習問題 2.28 次の関数の極大・極小を求めよ。

(1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y + 1$

(2) $z = x^2 - 5xy + 2y^2 + x - y - 3$

(3) $z = \frac{ax + by}{x^2 + y^2 + 1}$ ($a \neq 0, b \neq 0$)

(4) $z = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2)$ ($a > b > 0$)@

(5) $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 1$

(6) $z = x^3 - 3xy + y^3$

(7) $z = xy(x^2 + y^2 - 1)$

(8) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(1) (a) 最初に臨界点 ($z_x = 0$ かつ $z_y = 0$ となる点) を求める。 $z_x = 2x - y - 2, z_y = -x + 2y + 3$ なので連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解くと $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$ が得られる。(b) 次にヘッシアンを計算する。 $z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = -1$ なので $H(x, y) = 2^2 - (-1)^2 = 3 > 0, z_{xx} > 0$ である。よって z は $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ で極小値 $-\frac{4}{3}$ をとる。

(2) 同様に計算すると $\left(-\frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right)$ が臨界点であるが、 $H(x, y) = -17 < 0$ である。臨界点が極値を与えないので極値は存在しない。

(3) $z_x = \frac{a}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, z_y = \frac{b}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2(ax + by)y}{x^2 + y^2 + 1}$ なので臨界点は連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ の解である。 $z_x = 0$ より $x = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}a$ となる。また $z_y = 0$

より $y = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}b$ となる。 $k = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2(ax + by)}$ とおくと $x = ka, y = kb$ となる。これを $z_x(x^2 + y^2 + 1) = a(x^2 + y^2 + 1) - 2(ax + by)x = 0$ に代入して

$$a((a^2 + b^2)k^2 + 1) - 2(a^2 + b^2)ak^2 = 0$$

を得る。これを解くと $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ となるので、臨界点は

$$(x, y) = \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

である。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{2(ax^3 - 3y^2ax - 3ax + 3byx^2 - by^3 - by)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ \frac{2(3ayx^2 - ay^3 - ay - bx^3 + 3bxy^2 - bx)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & -\frac{2(3byx^2 - by^3 + 3by - 3y^2ax + ax^3 + ax)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{vmatrix}$$

となるが、

$$H\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{a^2 + b^2}{4} > 0$$

なので $z_{xx}\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} > 0$ より $(x, y) = \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ は極大値を与える。極値は

$$z\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1}$$

である。

(4) $z_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}ax$, $z_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2) + 2e^{-(x^2+y^2)}by$ となっている。連立方程式 $z_x = 0, z_y = 0$ を解く。 $e^{-(x^2+y^2)} \neq 0$ なので

$$z_x = 0 \iff x = 0 \vee a - (ax^2 + by^2) = 0, \quad z_y = 0 \iff y = 0 \vee b - (ax^2 + by^2) = 0$$

となっている。場合分けを実行する。(a) $x = 0$, (b) $a - (ax^2 + by^2) = 0$, (c) $y = 0$, (d) $b - (ax^2 + by^2) = 0$, とすると,

$$\left((a) \vee (b) \right) \wedge \left((c) \vee (d) \right) = \left((a) \wedge (c) \right) \vee \left((a) \wedge (d) \right) \vee \left((b) \wedge (c) \right) \vee \left((b) \wedge (d) \right)$$

となる。

(1) (a) \wedge (c) のとき: この場合は $x = 0$ かつ $y = 0$ なので解は $(x, y) = (0, 0)$ である。

(2) (a) \wedge (d) のとき: $x = 0$ を $b - (ax^2 + by^2) = 0$ に代入すると, $b(1 - y^2) = 0$ となる。 $b \neq 0$ より $1 - y^2 = 0$, よって $y = \pm 1$ となる。この場合解は $(x, y) = (0, \pm 1)$ である。

(3) (b) \wedge (c) のとき: $y = 0$ を $a - (ax^2 + by^2) = 0$ に代入すると, $a(1 - x^2) = 0$ となる。 $a \neq 0$ より $1 - x^2 = 0$, よって $x = \pm 1$ となる。この場合解は $(x, y) = (\pm 1, 0)$ である。

(4) (a) \wedge (d) のとき: $a = ax^2 + by^2 = b$ となるので $a = b$ となり, $a > b$ に矛盾する。よってこの場合解はない。

以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0)$$

となる。

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(-5ax^2 - by^2 + 2x^4a + 2x^2by^2 + a) & 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2 - b - a) & 2e^{-(x^2+y^2)}(-ax^2 - 5by^2 + 2y^2ax^2 + 2y^4b + b) \end{vmatrix}$$

なので

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0$$

$$H(0, 1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$H(0, -1) = \begin{vmatrix} \frac{2(a-b)}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{4b}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(a-b)b}{e^2} < 0$$

$$H(1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0$$

$$H(-1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2(b-a)}{e} \end{vmatrix} = -\frac{8(b-a)a}{e^2} > 0$$

となる。よって z は $(x, y) = (0, 0)$ で極小値 $z(0, 0) = 0$, $(x, y) = (\pm 1, 0)$ で極大値 $z(\pm 1, 0) = \frac{a}{e}$ をとる。

(5) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2 + 2y^2 - 6x, \quad z_y = 4xy - 6y$$

なので $z_y = 0$ より $y(2x - 3) = 0$ となるので, $y = 0$ または $2x - 3 = 0$ となる。 $y = 0$ のとき

$$z_x(x, 0) = 3x^2 + 2 \cdot 0^2 - 6x = 3x^2 - 6x = 0$$

を得る。よって $y = 0$ のときは $x = 0$ または $x = 2$ である。

$x = \frac{3}{2}$ のとき

$$z_x\left(\frac{3}{2}, y\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2y^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

を得る。よって $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (2, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6x - 6, \quad z_{xy} = 4y, \quad z_{yy} = 4x - 6$$

なので

$$H(x, y) = 12(x - 1)(2x - 3) - 16y^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 36 > 0, H(2, 0) = 12 > 0, H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0, H\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -18 < 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(0, 0)$ と $(2, 0)$ である。 $z_{xx}(0, 0) = -6 < 0$, $z_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ なので $(0, 0)$ では極大, $(2, 0)$ では極小である。

(6) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 - y + x = (x^2 - y^2) + (x - y) \\ &= (x - y)(x + y) + (x - y) \\ &= (x - y)(x + y + 1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x = y$ または $x + y = -1$ が成立する。

最初に $x+y = -1$ が成立している場合を考える。 $y = -1-x$ を $x = y^2$ に代入すると、 $x = (1+x)^2$ より $x^2 + x + 1 = 0$ を得る。この2次方程式は実数解を持たないので、この場合は解はない。よって $x = y$ が成立する。これをもとの方程式に代入すると $x = 0, 1$ が得られる。よって臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1)$$

である。

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3, \quad z_{yy} = 6y$$

なので

$$H(x, y) = 36xy - 9$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -9 < 0, \quad H(1, 1) = 27 > 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(x, y) = (1, 1)$ である。 $z_{xx}(1, 1) = 6 > 0$ なので $(1, 1)$ で極小である。

(7) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = y(x^2 + y^2 - 1) + 2x^2y, \quad z_y = x(x^2 + y^2 - 1) + 2xy^2$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引くことにより

$$\begin{aligned} 0 &= (y-x)(x^2 + y^2 - 1) + 2xy(x-y) = (y-x)(x^2 + y^2 - 1) - 2xy(y-x) \\ &= (y-x)(x^2 + y^2 - 1 - 2xy) = (y-x)((x-y)^2 - 1) \\ &= (y-x)(x-y-1)(x-y+1) \end{aligned}$$

を得る。よって $x = y$ または $x - y - 1 = 0$ または $x - y + 1 = 0$ が成立する。

最初に $x = y$ が成立している場合を考える。

$$\begin{aligned} 0 &= z_x(x, x) = x(x^2 + x^2 - 1) + 2x^3 = x(4x^2 - 1) \\ &= x(2x-1)(2x+1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \pm \frac{1}{2}$ となる。よってこの場合

$$(x, y) = (0, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

である。

次に $x - y - 1 = 0$ の場合を考える。 $y = x - 1$ なので

$$\begin{aligned} 0 &= z_y(x, x-1) = x(x^2 + (x-1)^2 - 1) + 2x(x-1)^2 = x(x^2 + (x-1)^2 - 1 + 2(x-1)^2) \\ &= x(4x^2 - 6x + 2) = 2x(2x^2 - 3x + 1) \\ &= 2x(2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \frac{1}{2}$ または $x = 1$ となる。今の場合 $y = x - 1$ なので

$$(x, y) = (0, -1), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 0)$$

である。

最後に次に $x - y + 1 = 0$ の場合を考える。 $y = x + 1$ なので

$$\begin{aligned} 0 = z_y(x, x+1) &= x(x^2 + (x+1)^2 - 1) + 2x(x+1)^2 = x(x^2 + (x+1)^2 - 1 + 2(x+1)^2) \\ &= x(4x^2 + 6x + 2) = 2x(2x^2 + 3x + 1) \\ &= 2x(2x+1)(x+1) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = -\frac{1}{2}$ または $x = -1$ となる。今の場合 $y = x + 1$ なので

$$(x, y) = (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (-1, 1)$$

である。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$$

である。

$$z_{xx} = 6xy, \quad z_{xy} = 3x^2 + 3y^2 - 1, \quad z_{yy} = 6xy$$

なので

$$H(x, y) = 36x^2y^2 - (3x^2 + 3y^2 - 1)^2$$

となる。よって

$$H(0, 0) = -1 < 0, H(0, \pm 1) = -4 < 0, H(\pm 1, 0) = -4 < 0, H\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = 2 > 0, H\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

となる。よって極値を与える (x, y) は $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$ である。

$$z_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = z_{xx}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) > 0, \quad z_{xx}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = z_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < 0$$

なので $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ で極小であり, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で極大である。

(8) 最初に臨界点を求める。

$$z_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad z_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

なので $z_x = 0$ と $z_y = 0$ を加えて 4 で割ると

$$0 = x^3 + y^3 = (x + y) + (x^2 - xy + y^2)$$

を得る。よって $x + y = 0$ または $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立する。

最初に $x^2 - xy + y^2 = 0$ が成立している場合を考える。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

より $x = 0, y = 0$ を得る。これは $z_x(0, 0) = 0, z_y(0, 0) = 0$ を満たしている。

次に $x + y = 0$ の場合を考える。 $y = -x$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= z_x(x, -x) = 4x^3 - 4x - 4x = 4(x^3 - 2x) \\ &= 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

より $x = 0$ または $x = \sqrt{2}$ または $x = -\sqrt{2}$ となる。今の場合

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

となる。以上により臨界点は

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

である。

$$z_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z_{xy} = 4, \quad z_{yy} = 12y^2 - 4$$

なので

$$H(x, y) = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) - 16$$

となる。よって

$$H(0, 0) = 0, \quad H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$$

となる。 $z_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ なので $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小である。

$(x, y) = (0, 0)$ はこれだけではよく分からない。最初に $y = x$ 上での z の動きを見よう。 $g(x) = z(x, x)$ とおくと

$$g(x) = 2x^4$$

となるので $x = 0$ で極小である。よって $(0, 0)$ の十分近くの点 (x, y) で (今の場合 $y = x$ を満たしている) , $z(x, y) > z(0, 0)$ となる点がある。

次に $y = -x$ 上での z の動きを見よう。 $h(x) = z(x, -x)$ とおくと

$$h(x) = 2x^4 - 8x^2$$

となる。 $h(x)$ の増減表を書いて $x = 0$ のまわりの状況を調べると , $y = -x$ 上では極大になっている。よって $(0, 0)$ の十分近くの点 (x, y) で (今の場合 $y = -x$ を満たしている) , $z(x, y) < z(0, 0)$ となる点がある。十分近くに $z(0, 0)$ より大きい点も小さい点もあるので , z は $(0, 0)$ で極値をとらない。

以上により $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ および $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で極小値をとる。

演習問題 2.29

- (1) 3 辺の和が一定の 3 角形の中で面積最大のものを求めよ。
 (2) 定円に内接する 3 角形のなかで面積最大のものを求めよ。

(1) このタイプの問題では何を変数に選ぶかで計算量が変わる。ここではヘロンの公式を用いて解こう。ヘロンの公式：3 角形の 3 辺の長さを a, b, c とする。 $s = \frac{a+b+c}{2}$ とおくと、3 角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となる。

3 角形の各辺の長さを x, y, z とする。3 辺の長さの和は一定であるのでこれを $2s$ とおく、即ち $x+y+z = 2s$ ($s > 0$) が成立している。 x, y, z は辺の長さであるから $x > 0, y > 0, z > 0$ を満たしている。 x, y, z が 3 角形の 3 辺をなすためには 3 角不等式、即ち $x+y > z, y+z > x, z+x > y$ が成立している事が必要である。逆にこれらの不等式が成立しているとき、3 辺の長さが x, y, z であるような 3 角形が存在する。 z を消去して x, y の不等式から $x < s, y < s, x+y > s$ が得られる。逆にこの 3 つの不等式をみたす x, y は最初の 6 つの不等式を満たす。

$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq s, y \leq s, x+y \geq s\}$ とおく。ここで S が最大するとき S^2 が最大であり、逆も成立する。よって S^2 が最大になる場合を求めるればよい。

$$f(x, y) = S^2 = s(s-x)(s-y)(x+y-s)$$

とおき、 \bar{D} 上で $f(x, y)$ の最大値を求める。 \bar{D} は有界閉集合であり、 $f(x, y)$ は \bar{D} 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。境界上では関数は $f(x, y) = 0$ となる。よって内部で最大値をとる。この点は臨界点なので臨界点を求める。

$$f_x = s(s-x)(s-y) - s(s-y)(x+y-s) = 0$$

$$f_y = s(s-x)(s-y) - s(s-x)(x+y-s) = 0$$

を解いて $(x, y) = (0, s), (s, 0), (s, s), \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$ が得られる。この中に最大値を与える点が存在する。 $f(0, s) = 0, f(s, 0) = 0, f(s, s) = 0, f\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) = \frac{s^4}{27}$ なので最大値を与える点は $(x, y) = \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$ である。このとき $x = y = z = \frac{2s}{3}$ なので 3 角形は正 3 角形である。以上により正 3 角形のとき面積最大になる。

(2) 定円を点 O を中心とする半径 r の円とする。円に内接する 3 角形を ABC とする。角 $\angle AOB = s, \angle BOC = t, \angle COA = u$ とおくと $s+t+u = 2\pi$ が成立している。最大面積を求めるので、 ABC は O を含んでいるとしてよい。このとき ABC が 3 角形をなす条件は $0 < s < \pi, 0 < t < \pi, 0 < u < \pi$ である。この不等式が定義する領域を D とすると $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s < \pi, t < \pi, s+t > \pi\}$ となる。

3 角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$

なので、 $\bar{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq \pi, t \leq \pi, s+t \geq \pi\}$ 上で

$$z = f(s, t) = \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin t + \sin(2\pi - s - t))$$

の最大値を求める問題になる。

\bar{D} は有界閉集合であり, $f(x, y)$ は \bar{D} 上の連続関数なので最大値が存在する。境界上または内部の点が最大値を与える。内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

最初に境界上での関数の値を考える。 $L_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = \pi, 0 \leq t \leq \pi\}$, $L_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq \pi, t = \pi\}$, $L_3 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq \pi, s + t = \pi\}$ とおくと $\partial \bar{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ である。 L_1 上で z は

$$\begin{aligned} z = f(\pi, t) &= \frac{1}{2}r^2 (\sin \pi + \sin t + \sin(2\pi - \pi - t)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin t + \sin(\pi - t)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin t + \sin t) = r^2 \sin t \end{aligned}$$

となるので, L_1 上で最大になるのは $(s, t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。 L_2 上では

$$z = f(s, \pi) = r^2 \sin s$$

となるので, L_2 上で最大になるのは $(s, t) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = r^2$ である。 L_3 上では $t = \pi - s$ なので

$$\begin{aligned} z = f(s, \pi - s) &= \frac{1}{2}r^2 (\sin \pi + \sin(\pi - s) + \sin(2\pi - \pi)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin(\pi - s)) \\ &= \frac{1}{2}r^2 (\sin s + \sin s) = r^2 \sin s \end{aligned}$$

となる。 L_3 上で最大になるのは $(s, t) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ のときで値は $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = r^2$ である。 以上により境界上での最大値は r^2 で $(s, t) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ でとることが分かる。

次に臨界点を調べる。

$$z_s = \frac{1}{2}r^2 (\cos s - \cos(2\pi - s - t)), \quad z_t = \frac{1}{2}r^2 (\cos t - \cos(2\pi - s - t))$$

なので臨界点では $\cos s - \cos(2\pi - s - t) = 0$ かつ $\cos t - \cos(2\pi - s - t) = 0$ が成立している。これより $\cos s = \cos t$ が得られる。 $0 \leq s \leq \pi$ かつ $0 \leq t \leq \pi$ であるが, この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = t$ が成立する。 $t = s$ を代入して $\cos s = \cos(2\pi - 2s)$ を得る。 $0 \leq s \leq \pi$ より, $0 \leq 2s \leq 2\pi$, $-2\pi \leq -2s \leq 0$, $0 \leq 2\pi - 2s \leq 2\pi$ と変形できる。この範囲で $\cos x$ は単射なので $s = 2\pi - 2s$ が成立する。よって臨界点は $(s, t) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ である。

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 > r^2 = f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

なので f は $(s, t) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ で最大値をとる。 $s = t = u = \frac{2\pi}{3}$ なので最大になる 3 角形は正 3 角形である。

演習問題 *2.30 定理 2.31 を証明せよ。

$F_y(a, b) \neq 0$ なので $F_y(a, b) > 0$ の場合に証明する。 $F_y(a, b) < 0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよ)。 $F_y(a, b) > 0$ なので (a, b) のある近傍 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (a, b)) < \delta\}$ で $(x, y) \in U$ ならば $F_y(x, y) > 0$ となるものが存在する。以下点はすべて U 内にあるとする。 $F_y(a, b) > 0$ より $F(a, y)$ は y に関して単調増加である。 $F(a, b) = 0$ なので y_1, y_2 が存在して,

$$y_1 < b < y_2, \quad F(a, y_1) < F(a, b) = 0 < F(a, y_2)$$

を満たす。よって a のある近傍 $W = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ が存在して

$$\forall x \in W; F(x, y_1) < 0 < F(x, y_2)$$

を満たす。 $\forall x \in W$ に対し $F(x, y)$ は y に関し単調増加なので $F(x, y) = 0$ となる y が存在する。この y を $y = f(x)$ と定義すると, $F(x, f(x)) = 0$ かつ $b = f(a)$ となっている。 $x \in W$ に対し $y = f(x), k = f(x+h) - f(x)$ と置く。平均値の定理より

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = hF_x(x+\theta h, y+\theta k) + kF_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $y = f(x)$ なので, $F(x, y) = 0$, $y+k = f(x+h)$ なので, $F(x+h, y+k) = 0$ が成立する。よって

$$0 = hF_x(x+\theta h, y+\theta k) + kF_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_x(x+\theta h, y+\theta k)}{F_y(x+\theta h, y+\theta k)} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \end{aligned}$$

$F_y(a_1, a_2, b) \neq 0$ なので $F_y(a_1, a_2, b) > 0$ の場合に証明する。 $F_y(a_1, a_2, b) < 0$ の場合も同様に証明できる (各自試みよ)。 $F_y(a_1, a_2, b) > 0$ なので (a_1, a_2, b) のある近傍

$$U = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x_1, x_2, y), (a_1, a_2, b)) < \delta\}$$

で $(x_1, x_2, y) \in U$ ならば $F_y(x_1, x_2, y) > 0$ となるものが存在する。以下点はすべて U 内にあるとする。 $F_y(a_1, a_2, b) > 0$ より $F(a_1, a_2, y)$ は y に関して単調増加である。 $F(a_1, a_2, b) = 0$ なので y_1, y_2 が存在して,

$$y_1 < b < y_2, \quad F(a_1, a_2, y_1) < F(a_1, a_2, b) = 0 < F(a_1, a_2, y_2)$$

を満たす。よって (a_1, a_2) のある近傍 $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < \varepsilon\}$ が存在して

$$\forall (x_1, x_2) \in W; F(x_1, x_2, y_1) < 0 < F(x_1, x_2, y_2)$$

を満たす。 $\forall (x_1, x_2) \in W$ に対し $F(x_1, x_2, y)$ は y に関し単調増加なので $F(x_1, x_2, y) = 0$ となる y が存在する。この y を $y = f(x_1, x_2)$ と定義すると, $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$ かつ $b = f(a_1, a_2)$

となっている。 $(x_1, x_2) \in W$ に対し $y = f(x_1, x_2), k = f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)$ と置く。 x_2 は固定し x_1, y に関する 2 変数関数だとみなして平均値の定理を適用すると

$$F(x_1 + h, x_2, y + k) - F(x_1, x_2, y) = hF_{x_1}(x_1 + \theta h, x_2, y + \theta k) + kF_y(x_1 + \theta h, x_2, y + \theta k)$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する。 $y = f(x_1, x_2)$ なので、 $F(x_1, x_2, y) = 0, y + k = f(x_1 + h, x_2)$ なので、 $F(x_1 + h, x_2, y + k) = 0$ が成立する。よって

$$0 = hF_{x_1}(x_1 + \theta h, x_2, y + \theta k) + kF_y(x_1 + \theta h, x_2, y + \theta k)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x_1}(x_1 + \theta h, x_2, y + \theta k)}{F_y(x_1 + \theta h, x_2, y + \theta k)} = - \frac{F_{x_1}(x_1, x_2, y)}{F_y(x_1, x_2, y)} \end{aligned}$$

変数 x_2 についても同様に示すことができる (各自試みよ)。

演習問題 2.31 次で与えられる陰関数に関し $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

- (1) $1 - y + xe^y = 0$
- (2) $x^3y^3 + y - x = 0$
- (3) $F(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$ (デカルトの正葉線)

(1) 式の両辺を x で微分すると

$$-y' + e^y + xe^y y' = 0 \tag{3}$$

となる。よって

$$y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

となる。式 (3) の両辺を x で微分すると

$$-y'' + 2e^y y' + xe^y (y')^2 + xe^y y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^2}$$

となる。

(2) 式の両辺を x で微分すると

$$3x^2y^3 + 3x^3y^2y' + y' - 1 = 0 \tag{4}$$

となる。よって

$$y' = \frac{1 - 3x^2y^3}{1 + 3x^3y^2}$$

となる。式 (4) の両辺を x で微分すると

$$6xy^3 + 18x^2y^2y' + 6x^3y(y')^2 + 3x^3y^2y'' + y'' = 0$$

となるので

$$y'' = \frac{6xy(9x^6y^6 + 3x^3y^4 - y^2 - 3x^4y^3 - 3xy - x^2)}{(1 + 3x^3y^2)^3}$$

となる。

(3) 式の両辺を x で微分すると

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0 \quad (5)$$

となる。よって

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

となる。式 (5) の両辺を x で微分すると

$$6x - 3y' - 3y' - 3xy'' + 6yy'y' + 3y^2y'' = 0$$

となるの。

$$2(x - y' + yy'^2) + (y^2 - x)y'' = 0$$

と変形する。

$$\begin{aligned} x - y' + yy'^2 &= x + y'(yy' - 1) = x + \frac{x^2 - y}{x - y^2} \left(y \frac{x^2 - y}{x - y^2} - 1 \right) \\ &= x \left(1 + \frac{(x^2 - y)(xy - 1)}{(x - y^2)^2} \right) = xy \left(\frac{x^3 - 3xy + y^3 + 1}{(x - y^2)^2} \right) \\ &= \frac{xy}{(x - y^2)^2} \quad (\text{変形の途中で } x^3 - 3xy + y^3 = 0 \text{ を使用}) \end{aligned}$$

なので

$$y'' = \frac{2xy}{(x - y^2)^3}$$

となる。