解析学 I 問題解説 #11

河野

演習問題 3.1　下記のヒントを参考にして上の漸化式を証明せよ。ヒント：$\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ を積分すると $J_n = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx + a^2 J_{n+1}$ が得られるので，部分積分すると…。

$g = -\dfrac{1}{2n(x^2+a^2)^n}$ とおくと $g' = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ なので

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int x\frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int xg'\,dx$$
$$= xg - \int x'g\,dx = xg - \int g\,dx$$

である。

$$\int g\,dx = -\int \frac{1}{2n(x^2+a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2n}J_n$$

なので

$$J_n = -\frac{x}{2n(x^2+a^2)^n} + \frac{1}{2n}J_n + a^2 J_{n+1}$$

を整理すると漸化式が得られる。

演習問題 3.2　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　(2) $\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$　(3) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

(4) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$　(5) $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$　(6) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

(7) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$　(8) $\dfrac{1}{x^3+1}$　(9) $\dfrac{1}{x^4+1}$

やり方により得られる積分の表示が解説と異なる場合もある。得られた関数を微分して被積分関数になれば解説と異なる形をしていても正しい結果である。

(1)　$\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1}$ とおき係数を比較すると $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ と部分分数展開できる。よって

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx = \log|x-1| - \log|x|$$

(2)　$\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$ と部分分数展開できる。

$$\int \frac{2x}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \log|x+1| + \log|x-1|$$

(3)　$\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\,dx = \log|x| - \frac{2}{x-1}$$

(4)　分子の次数の方が高いので割り算をした後で，部分分数展開すると $x^2-2+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ となる。

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\log|x+1| + \frac{1}{x+1}$$

(5)　$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ と因数分解できるので，

$$\frac{1}{x(x^4-1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}$$

と部分分数展開する。

$$\int \frac{1}{x(x^4-1)}\,dx = \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{4}\log|x+1| - \log|\,x| + \frac{1}{4}\log|x-1|$$

(6)　$n=1, a=1$ として漸化式を用いると

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + J_1\right)$$

なので

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x$$

(7)　$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ なので $t=x+1$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int\left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2+1) - 2\arctan t \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1)\end{aligned}$$

(8)　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解できるので，$\dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$ と部分分数展開する。る。x^2-x+1 は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ と変形して置換積分することで次が得られる。

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

(9)　これは因数分解が問題。

$$\begin{aligned}x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)\end{aligned}$$

と因数分解できる。$\dfrac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}-\dfrac{\sqrt{2}x-2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}$ と部分分数展開できる。

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

演習問題 3.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin x\cos x$　(2) $\sin^3 x$　(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $\dfrac{1}{\tan x}$　(5) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(6) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

(1)　**三角関数は積の形になっているときは和に直すことで積分が簡単になる場合が多い。**この場合は和を積に直すことは倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ を適応することに対応する。

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

(2)　和を積に直すことを 2 回実行すると，または直接 3 倍角の公式を適応するすると，

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

となるので。

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$$

別の方法として，$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ と見て $u=\cos x$ と変数変換してもできる。

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = -\int\left(1-u^2\right)\,du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 - u = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

(3)　$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\,dt$$
$$= \log|1+t| - \log|1-t| = \log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \log\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

(4)　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ なので $t=\sin x$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|\sin x|$$

(5)　$t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{1+\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

(6)　$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおき置換積分を実行する。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\,dx &= \int \frac{2}{t^2+2t-1}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}+1} - \frac{1}{t+\sqrt{2}+1}\right)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}+1\right| - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{2}+1\right|\right)\end{aligned}$$

演習問題 3.4　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}$

(4) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$　(5) $\sqrt{1-x^2}$

(1)　$\sqrt{2-3x^2} = \sqrt{3\left(\dfrac{2}{3}-x^2\right)} = \sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2 - x^2}$ と変形できるので $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin t$ とおき置換積分を実行する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

(2)　$3+2x-x^2 = 4-x^2+2x-1 = 2^2-(x-1)^2$ となるので $u = x-1$ とおくと積分は

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,du$$

となる。$u = 2\sin t$ とおいて置換積分を実行する。

$$I = \int dt = \arcsin t = \arcsin\frac{u}{2} = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

(3)　$\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{3\left(x^2-\dfrac{2}{3}\right)} = \sqrt{3}\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)}$ と変形できるので $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{1}{\sin t}$ とおいて置換積分を実行する。$\dfrac{dx}{dt} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$，$\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sin^2 t}-\dfrac{2}{3}} = \sqrt{2}\dfrac{\cos t}{\sin t}$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{3x^2-2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{1}{\sin t}\sqrt{2}\dfrac{\cos t}{\sin t}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}t = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x}\right)\end{aligned}$$

(4)　$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ なので $u = x+\dfrac{1}{2}$ とおくと積分は

$$I = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{u^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du$$

となる。$u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ とおいて置換積分を実行する。

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\int dt = \frac{2}{\sqrt{3}}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u + \frac{1}{2}\right)$$

(5)　$x = \sin t$ とおいて置換積分を実行する。途中 $\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t + 1}{2}$ を用いる。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (\cos 2t + 1)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}\left(t + \sin t\cos t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$ に $t = \arcsin t$ を代入した，$\dfrac{1}{2}\arcsin x + \dfrac{1}{4}(\sin 2\arcsin x)$ も勿論正解であるが，少し「格好をつけて」変形した。

演習問題 3.5　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　(3) $\sqrt{x^2+2}$

(4) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

(1)　$\sqrt{1-x^2} = t(x+a)$ または同じことだが $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗して，$t^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$ となる。x について解くと $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を得る。$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$ であり，$\sqrt{1-x^2} = t(x+1) = t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2}\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)\,dt = -2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= -2\arctan t = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\end{aligned}$$

(2)　$\sqrt{x^2+1} = t - x$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると $x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2$ であり，これを x について解くと，$x = \dfrac{t^2-1}{2t}$ となる，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+1}{2t^2}$ であり $\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{1+t^2}{2t}$ となる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int \frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \log|t| = \log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\end{aligned}$$

(3)　$\sqrt{x^2+2} = t - x$ とおいて置換積分を実行する。両辺を 2 乗すると $x^2 + 2 = t^2 - 2tx + x^2$ であり，これを x について解くと，$x = \dfrac{t^2-2}{2t}$ となる，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+2}{2t^2}$ であり $\sqrt{x^2+1} = t - x =$

$t - \dfrac{t^2-2}{2t} = \dfrac{t^2+2}{2t}$ となる。

$$\int \sqrt{x^2+2}\,dx = \int \frac{t^2+2}{2t}\frac{t^2+2}{2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2 + 4\log\left(\sqrt{x^2+2}+x\right) - \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2}\right)$$

(4) $\sqrt{4-x^2} = t(x+2)$ または同じことだが $t = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ とおいて置換積分を実行する。$t^2 = \dfrac{2-x}{2+x}$ より $x = \dfrac{2-2t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{8t}{(1+t^2)^2}$，$\sqrt{4-x^2} = t(x+2) = \dfrac{4t}{1+t^2}$ となる。

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \left(\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{1+t^2}{4t}\frac{8t}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) dt$$
$$= \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$$

演習問題 3.6 今までは学んだ事に対応する演習問題で，演習問題の場所によってどの方法を使うかというのは明らかであった。最後に色々なタイプを混ぜて演習問題とする。積分計算の手法を身につけるのが目的なのですべてを解く必要はない。また中には難問もある。嗅覚を働かせてそれを避ける練習にもなるかもしれない。

次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	(2) $\cos^2 x - \sin^2 x$	(3) $\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$
(4) $x\arcsin x$	(5) $\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$	(6) xe^{-x}
(7) $x\cos x$	(8) $x^2\sin x$	(9) e^{3x+1}
(10) $2x\arctan x$	(11) $\log(2x+1)$	(12) $\dfrac{1}{x(\log x)^n}$
(13) $x^2\log x$	(14) xe^{2x^2+3}	(15) $\dfrac{e^x}{x} + e^x\log x$
(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$	(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$	(18) $\cos^n x\sin x$
(19) $(ax^2+bx+c)e^x$	(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$	(21) $\sin(\log x)$
(22) x^3e^x	(23) x^4e^x	(24) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$
(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$	(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$	(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$	(29) $\dfrac{1}{\sin x\cos^5 x}$	(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$
(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$	(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$	(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$
(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$	(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(36) $\sqrt{x^2-1}$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ (38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ (39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ (41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ (42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$ (44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ (45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$ (47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$ (48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$ (50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$ (51) $\dfrac{3}{x^3-1}$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$ (53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$ (54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

(55) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ (56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$ (59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ (60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$ (62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ (65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$ (66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$ (68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ (69) $\sin 4x$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$ (71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ (72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$ (74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ (75) $3x^2(x^3+5)^6$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$ (77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (78) $e^{ax}\cos bx$

(79) $e^{ax}\sin bx$

問題が長いので解説の前に被積分関数をもう一度書いておきます。

(1) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$: いきなり「ルートのなかの 2 次式」を解く方法でやってもできますが，$\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x+x^3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-x\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x\sqrt{1-x^2}$ と変形してから考えたほうが簡単かもしれない。$t=1-x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=-2x$ である。

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x\sqrt{1-x^2}\right)\,dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-x\sqrt{t}\right)\left(-\frac{1}{2x}\right)\,dt\\&=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{3}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{3}\end{aligned}$$

(2) $\cos^2 x-\sin^2 x$: 三角関数の積は和に直すというのが一般的な考え方ですが，この場合は加法定理の形そのものです。

$$\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\,dx=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x$$

(3)　$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ ：$\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^{3/2}}$ と見ると…，$u = 1+x^2$ と置けばよいことに気づくでしょう。

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,du = -\frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4)　$x \arcsin x$：部分積分法。

$$I = \int x \arcsin x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arcsin x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

となるが，第 2 項の積分は $x = \sin t$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \sin^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t\cos t \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となるので

$$I = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x - \frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$$

(5)　$\dfrac{\cos 2x}{e^{3x}}$ ：部分積分を 2 回，一般的な形を後の (78) で考えます。

$$\begin{aligned}I &= \int e^{-3x}\cos 2x\,dx = \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)' \cos 2x\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x - \frac{2}{3}\int e^{-3x}\sin 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x - \frac{2}{3}\int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)' \sin 2x\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 2x + \frac{2}{9}e^{-3x}\sin 2x - \frac{4}{9}I\end{aligned}$$

となるので，整理すると

$$I = \frac{1}{13}\left(-3e^{-3x}\cos 2x + 2e^{-3x}\sin 2x\right)$$

(6)　xe^{-x} ：部分積分法。

$$\int xe^{-x}\,dx = \int x\left(-e^{-x}\right)'\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

(7)　$x\cos x$：部分積分法。

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$$

(8)　$x^2 \sin x$：部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\,dx &= \int x^2\,(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + \int 2x\,(\sin x)'\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx\end{aligned}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

(9)　e^{3x+1}：これはどう置けばよいか分かっているでしょう。簡単な置換積分法。$t = 3x + 1$ とおく。

$$\int e^{3x+1}\,dx = \int \frac{1}{3} e^t\,dt = \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{3x+1}$$

(10)　$2x \arctan x$：部分積分法。

$$I = \int 2x \arctan x\,dx = \int \left(x^2\right)' \arctan x\,dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

ここで

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x$$

なので

$$I = x^2 \arctan x - x + \arctan x$$

(11)　$\log(2x+1)$：簡単な置換積分法 + 部分積分法。$t = 2x + 1$ とおく。

$$\int \log(2x+1)\,dx = \frac{1}{2} \int \log t\,dt = \frac{1}{2} \left(t \log |t| - t\right) = \frac{1}{2} \left((2x+1) \log |2x+1| - (2x+1)\right)$$

(12)　$\dfrac{1}{x(\log x)^n}$：$\dfrac{1}{x(\log x)^n} = (\log x)' \dfrac{1}{(\log x)^n}$ と考えると…。$t = \log x$ とおく。$n = 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x \log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log |t| = \log |\log x|$$

$n \neq 1$ のときは

$$\int \frac{1}{x(\log x)^n}\,dx = \int \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{t^{1-n}}{1-n} = \frac{(\log x)^{1-n}}{1-n}$$

(13)　$x^2 \log x$：部分積分法。

$$\int x^2 \log x\,dx = \int \left(\frac{1}{3} x^3\right)' \log x\,dx = \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2\,dx = \frac{1}{2} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3$$

(14)　xe^{2x^2+3}：置換積分法です。$t = 2x^2 + 3$ とおく。

$$\int xe^{2x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{4} e^t\,dt = \frac{1}{4} e^{2x^2+3}$$

(15)　$\dfrac{e^x}{x} + e^x \log x$：一方の関数を部分積分すると他の関数と打ち消しあって…。

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{x} + e^x \log x\,dx &= \int \frac{e^x}{x}\,dx + \int (e^x)' \log x\,dx = \int \frac{e^x}{x}\,dx + e^x \log x - \int \frac{e^x}{x}\,dx \\ &= e^x \log x\end{aligned}$$

(16) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$: この様な問題の場合試行錯誤でやるしかありません。色々な置き方を試してうまくいくものを探します。まず思いつくのは $t=\dfrac{x}{x+1}$ とおくことでしょう。しかしこれを実行すると (各自計算してみること), $\displaystyle\int\frac{2t}{(1-t^2)^2}\arcsin\sqrt{t}\,dt$ となりこの積分は難しそうです。そこで $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\displaystyle\int t\frac{2\sin t}{\cos^3 t}\,dt$ となります。$(\tan^2 t)'=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$ に気が付くと部分積分を実行して…。

$t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ とおくと $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=\sin t$ より $\dfrac{x}{x+1}=\sin^2 t$ である。これを x について解くと $x=\dfrac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}=\tan^2 t$ である。

$$\begin{aligned}\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx &= \int t\left(\tan^2 t\right)'\,dt = t\tan^2 t-\int\tan^2 t\,dt = t\tan^2 t-\tan t+t\\ &= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\end{aligned}$$

(17) $(2x+1)\sin(x^2+x+1)$: $(2x+1)\sin(x^2+x+1)=(x^2+x+1)'\sin(x^2+x+1)$ なので…。
$t=x^2+x+1$ とおく。

$$\int(2x+1)\sin(x^2+x+1)\,dx=\int\sin t\,dt=-\cos t=-\cos(x^2+x+1)$$

(18) $\cos^n x\sin x$: $\cos^n x\sin x=-\cos^n x(\cos x)'$ なので…。
$t=\cos x$ とおく。

$$\int\cos^n x\sin x\,dx=-\int t^n\,dt=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x$$

(19) $(ax^2+bx+c)e^x$: 部分積分法 2 回。

$$\begin{aligned}\int(ax^2+bx+c)e^x\,dx &= \int(ax^2+bx+c)\left(e^x\right)'\,dx=(ax^2+bx+c)e^x-\int(2ax+b)\left(e^x\right)'\,dx\\ &= (ax^2+bx+c)e^x-(2ax+b)e^x+\int 2ae^x\,dx=(ax^2+(b-2a)x+c-b+2a)e^x\end{aligned}$$

(20) $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$: (16) で述べたように，どう変数変換するかは試行錯誤でやるしかありません。でも少し積分に慣れれば，$\arcsin x$ を消すという考え方でも,「ルートの中の 2 次式」という見方からも，次のようにおくのは気がつくと思います。ここを見なくても自分でできた人はかなり積分に精通しつつあるといえます。

$t=\arcsin x$ とおくと，$x=\sin t$ より $1-x^2=\cos^2 t$ である。

$$\begin{aligned}\int\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int\frac{t}{\cos^2 t}\,dt=\int t\left(\tan t\right)'\,dt=t\tan t-\int\tan t\,dt\\ &= t\tan t+\log|\cos t| = \frac{t\sin t}{\cos t}=\frac{1}{2}\log|\cos t|^2\\ &= \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log|1-x^2|\end{aligned}$$

(21) $\sin(\log x)$：$t = \log x$ とおき $\displaystyle\int e^t \sin t\, dt$ と変形。(79) 参照。

$$
\begin{aligned}
I = \int e^t \sin t\, dt = \int \left(e^t\right)' \sin t\, dt = e^t \sin t - \int e^t \cos t\, dt \\
= e^t \sin t - e^t \cos t + \int e^t \sin t\, dt = e^t \sin t - e^t \cos t + I
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\int \sin(\log x)\, dx = \frac{x\left(\sin(\log x) - \cos(\log x)\right)}{2}
$$

(22) $x^3 e^x$：部分積分。

$$
\begin{aligned}
\int x^3 e^x\, dx = \int x^3 \left(e^x\right)'\, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x\, dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6xe^x\, dx\right) \\
\left(x^3 - 3x^2 + 6x + 6\right) e^x
\end{aligned}
$$

(23) $x^4 e^x$：部分積分。

$$
\begin{aligned}
\int x^4 ex^x\, dx = x^4 e^x - \int 4x^3 e^x\, dx = \left(x^4 - 4x^3\right) e^x + \int 12x^2 e^x\, dx \\
= \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2\right) e^x - \int 24xe^x\, dx = \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right) e^x
\end{aligned}
$$

(24) $\dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$：因数分解が問題です。やり方は以前やった x^4+1 と同じで，$x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$ と 2 乗の差にして因数分解を実行する。あとは有理関数の積分の定石で部分分数展開して…。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}\right) dx \\
= \frac{1}{4}\left(\log(x^2+x+1) - \log(x^2-x+1)\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(25) $\dfrac{1}{1+x^2}$：$x = \tan t$ と置換積分。

$$
\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int dt = t = \arctan x
$$

(26) $\dfrac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}$：$\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x^2+1}$ と部分分数展開。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x)^2(x^2+1)}\, dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\
= \frac{1}{2}\left(\log|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)
\end{aligned}
$$

(27) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$：「ルートの中の 2 次式」です。三角関数を用いる方法，無理式を用いる方法のどちらでもできますが，計算の難度は異なります。

$x = 2\sin t$ とおく。

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int dt = t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(28) $\dfrac{1}{\cos^8 x}$：$I_n = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x} dx$ とおき漸化式を求める。

$$\begin{aligned} I_n &= \int \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^n x}\right) dx = I_{n-2} + \int \sin x \left(\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}\right)' dx \\ &= \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}} \end{aligned}$$

これを繰り返し適用すれば求まる。

$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{6}{7} I_6 + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} = \frac{6}{7}\left(\frac{4}{5} I_4 + \frac{\sin x}{5\cos^5 x}\right) + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\left(\frac{2}{3} I_2 + \frac{\sin x}{3\cos^3 x}\right) + \frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \\ &= \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{6}{7}\frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{\sin x}{7\cos^7 x} \end{aligned}$$

(29) $\dfrac{1}{\sin x \cos^5 x}$：$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいても計算できるが計算が複雑になるので，他の方法がある場合はそれで計算したほうがよい。この場合は $t = \tan x$ とおいた方が計算は簡単です。一般に $\sin x$ と $\cos x$ の偶数乗，例えば $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ などは $\tan x$ で表すことができます。$t = \tan x$ とおくと $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} \cos^2 x\, dt = \int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dt$ となる。$\sin x \cos x = \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\frac{\sin x \cos x}{\cos^2}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{t}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$ となるので $I = \displaystyle\int \frac{(1+t^2)^2}{t} dt$ となる。

$$I = \int \frac{1}{\sin x \cos^5 x} dx = \int \left(\frac{1}{t} + 2t + t^3\right) dt = \log|\tan x| + \tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x$$

(30) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$：これは $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくしかないようですね。$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+t^2}{2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $1+\sin x = \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}$, $1+\cos x = \dfrac{2}{1+t^2}$ なので

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2}\frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

(31) $\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}$: t=$a-x$ とおくと…。

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x}}\,dx = \int \frac{a-t}{\sqrt{t}(-1)}\,dt = \frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a-x}$$

(32) $\dfrac{1}{3+\cos x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\int \frac{1}{3+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t^2+2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

(33) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \int \frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2(t+1)}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t}{(t+1)(1+t^2)}\,dt \\ &= \int \left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{1}{2}\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \frac{x}{2} - \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|\end{aligned}$$

(34) $\dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^4}$: $t=e^x$ とおくと，$\displaystyle\int \frac{t^3}{(t^2+1)^4}\,dt$ となる。$\dfrac{t^3}{(t^2+1)^4} = \dfrac{t^3+t}{(t^2+1)^4} - \dfrac{t}{(t^2+1)^4} = \dfrac{t}{(t^2+1)^3} - \dfrac{t}{(t^2+1)^4}$ なので…。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}\,dx &= \int \left(\frac{t}{(t^2+1^3)} - \frac{t}{(t^2+1)^4}\right)dt = \frac{1}{6(t^2+1)^3} - \frac{1}{4(t^2+1)^2} \\ &= -\frac{3e^{2x}+1}{12\left(e^{2x}+1\right)^3}\end{aligned}$$

(35) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」です。

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

(36) $\sqrt{x^2-1}$: 「ルートの中の 2 次式」です。

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$$

(37) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」です。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)$$

(38) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」です。$x=\tan t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $1+x^2 = 1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2}\cos t\frac{1}{\cos^2}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dx = -\frac{1}{\sin t}$$

$x = \tan t,\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ なので

$$= -\frac{1}{\tan t \cos t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$t = \arctan x$ を直接代入して $-\dfrac{1}{\sin(\arctan x)}$ でも正解である。

(39) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。
$x = \tan t$ とおく。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \cos^3\left(1 - \frac{\sin 2t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos^2}\,dt = \int \left(\cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)dt \\ &= \int \left(\cos t - \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\right)dt = \int \left(2\cos t - \frac{1}{\cos t}\right)dt = 2\sin t - \int \frac{1}{\cos t}\,dt \end{aligned}$$

$J = \displaystyle\int \frac{1}{\cos t}\,dt$ は $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ として計算してもよいが，変数を x に戻すと

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) \quad なので$$

$$I = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

(40) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$x^2+2x-1 = (x+1)^2 - 2$ なので
$u = x+1$ とおき，更に $u = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin t}$ とおく。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx &= \int \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin t}{\sqrt{2}\cos t}\,\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right) \end{aligned}$$

(41) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ ：「ルートの中の 2 次式」です。$x = a\tan t$ とおくと，$I = \dfrac{1}{a^4}\displaystyle\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt$ となるので $u = \sin t$ とおくと…。

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}\,dx &= \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,dt = \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos t(1-\sin^2 t)}{\sin^4 t}\,dt = \frac{1}{a^4}\int \left(\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^2}\right)du \\ &= \frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3u^2}\right) = \frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{3\sin^3 t}\right) \end{aligned}$$

ここで $x = a\tan t,\ \sqrt{x^2+a^2} = \dfrac{a}{\cos t}$ より $\dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$ なので

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4 x} - \frac{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}{3a^4x^3}$$

(42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^6}}$: $t=\sqrt{1+x^6}$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^6}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{6}\left(\log|t-1|-\log|t+1|\right) = \frac{1}{6}\left(\log\left(\sqrt{1+x^6}-1\right)-\log\left(\sqrt{1+x^6}+1\right)\right)$$

(43) $\dfrac{1}{4+x^2}$: これは基本です。$x=2\tan t$ とおくと…

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(44) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$: $t=\sqrt[3]{x+1}$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{3t^2}{1+t}\,dt = 3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\log\left((x+1)^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

(45) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$: これは有理関数の積分の典型です。部分分数展開して…。

$\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ と部分分数展開できる。

$$\int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|x+1|+\log|x+1|-\log(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}\right)$$

(46) $3x^2e^{x^3+1}$: 典型的な置換積分。慣れてきた人は見た瞬間に分かると思います。

$$\int 3x^2e^{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}e^{x^3+1}$$

(47) $\dfrac{1}{x^3(x+1)}$: これは有理関数の積分の典型です。

$\dfrac{1}{x^3(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ と部分分数展開できるので

$$\int \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

(48) $\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}$: これも有理関数の積分の典型です。ただし部分分数展開の後 $\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ の積分が出てくるので，プリントに書いてある方法で分母の次数を下げる変形が必要になります。
$\dfrac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ と部分分数展開できる。今 $n=1, a=\sqrt{2}$ なので次数を下げる式は

$$J_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+J_1\right)$$

となる。

$$\int \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+2)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}\right) dx$$
$$= \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2)\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

(49) $\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}$: $\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^3}$ と部分分数展開する。$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ 等を分母の次数を下げて計算するので，プリントに書いてある方法で分母の次数を下げる変形が必要になります。
$\dfrac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x+5}{(x^2+1)^2}+\dfrac{4}{(x^2+1)^3}$ と部分分数展開できる。$J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ とすると $J_3 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{(x^2+1)^2}+3J_2\right)$，$J_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+J_1\right)$ である。

$$\int \frac{x^4-x^3-3x^2-x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x+5}{(x^2+1)^2} + \frac{4}{(x^2+1)^3}\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$
$$= J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + 4J_3 = J_1 + \frac{1}{2(x^2+1)} - 5J_2 + \left(\frac{x}{(x^2+1)^2}+3J_2\right)$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - 2J_2$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + J_1 - \left(\frac{x}{x^2+1}+J_1\right)$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

(50) $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}$: これも有理関数の積分の典型です。分母を因数分解して…。
$f(x) = x^4-x^3-x+1$ とおくと $f(1)=0$ なので $x-1$ を因数に持つ。$x-1$ で割った結果の多項式も $x-1$ で $x=1$ を解にもつので $f(x) = (x-1)^2(x^1+x+1)$ と因数分解できる。よって $\dfrac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1} = 1+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2+x+1}$ と部分分数展開できる。

$$\int \frac{x^4-x^3+2x+1}{x^4-x^3-x+1}\,dx = \int\left(1+\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) dx$$
$$= x - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

(51) $\dfrac{3}{x^3-1}$: これも有理関数の積分の典型です。

$$\int \frac{3}{x^3-1}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right) dx$$
$$= \log|x-1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)$$

(52) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+3}$: $t=e^x$ とおくと，$I=\displaystyle\int\frac{1}{t^2+3t+4}dt$ となるので…。

$$\int\frac{1}{e^x+4e^{-x}+3}\,dx=\int\frac{1}{t^2+3t+4}\,dt=\int\frac{1}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(e^x+\frac{3}{2}\right)\right)$$

(53) $\dfrac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおいてもできるが (29) で述べた方法でもできる。$t=\tan x$ とおくと…。

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}\,dx&=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+3\cos^2 x}\,\frac{dx}{dt}\,dt\\&=\int\frac{t^2}{4+t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{4}{4+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\&=\frac{1}{3}\left(4\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)-\arctan\left(\tan x\right)\right)\\&=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)-\frac{x}{3}\end{aligned}$$

(54) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$: $t=e^x$ とおくと…。

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{1}{t+\dfrac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt=\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan t=\arctan(e^x)$$

(55) $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$:倍角公式で 2 倍角の形に直した方が計算は簡単かもしれない。$t=\cos 2x$ とおく。

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx=\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x+1}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\arctan\left(\cos 2x\right)$$

(56) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$: $t=\sqrt{1-x}$ とおくと…。

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx=-2\sqrt{1-x}$$

(57) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$: $t=\sqrt{x}$ とおくと…。

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx=2\int\frac{t^2}{1+t^2}\,dt=2\left(t-\arctan t\right)=2\sqrt{x}-2\arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

(58) $\dfrac{1}{2-\tan^2 x}$: $t=\tan x$ とおくと…。

$$\int\frac{1}{2-\tan^2 x}\,dx=\int\frac{1}{(2-t^2)(1+t^2)}\,dt=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2-2}\right)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{6\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}}\right)dt \\
&= \frac{1}{3}\arctan t + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\log|t+\sqrt{2}| - \log|t-\sqrt{2}|\right) \\
&= \frac{1}{3}x + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\log|\arctan x+\sqrt{2}| - \log|\arctan x-\sqrt{2}|\right)
\end{aligned}
$$

(59) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$: 「ルートの中の 2 次式」$x = 2\sin t$ とおく。

$$
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int dt = t = \operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)
$$

(60) $\dfrac{\cos x}{\sin^n x}$: $\dfrac{\cos x}{\sin^n x} = \dfrac{(\sin x)'}{\sin^n x}$ と見て…。

$$
\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\sin^{1-n} x}{1-n}
$$

(61) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{1-x^2} = t(x+1)$ とおくと…。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\int \frac{1}{t^2+3}\,dt &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)
\end{aligned}
$$

(62) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$: 「ルートの中の 2 次式」$\sqrt{x^2-1} = t - x$ とおくと…。

$$
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)
$$

(63) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$: $\dfrac{\log(\log x)}{x} = (\log x)'\log(\log x)$ なので $t = \log x$ とおくと…。

$$
\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \int \log t\,dt = t\log t - t = \log x\log(\log x) - \log x
$$

(64) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$: $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(a^3+x^3)'}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}$ と見て $t = a^3+x^3$ とおくと…。

$$
\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{a^3+x^3}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \frac{1}{2}\left(a^3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}
$$

(65) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}$: $t = \sqrt{1-x}$ とおくと…。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2-2}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt \\
&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2}\right) - \log\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(66) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}$: $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ とおくと⋯。

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}}\,dx = -4\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}-\frac{2}{1+t^2}\right)\,dt$$
$$= \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right) - \log\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right) - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

(67) $\dfrac{12}{x^3-8}$: 有理関数の積分。

$$\int \frac{12}{x^3-8}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+4}{x^2+2x+4}\right)\,dx$$
$$= \log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

(68) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと⋯。

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}\,dt = \int \left(\frac{2}{t^2+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)\,dt$$
$$= 2\arctan t + \frac{2}{t+1} = x - \frac{2}{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+1}$$

(69) $\sin 4x$: 簡単な置換積分。$t=4x$ とおく。

$$\int \sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin t\,dt = \frac{1}{4}\cos 4x$$

(70) $\dfrac{1}{\cos x(5+3\cos x)}$: $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおくと⋯。

$$\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}\,dx = \int \frac{t^2+1}{(t^2+4)(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{3}{t^2+4}\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{5}\left(\log|t-1| - \log|t+1| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right| - \frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

(71) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$: $t=\arctan x$ とおき，$I=\displaystyle\int t(\tan t - t)'dt$ 変形して部分積分。

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx = \int t\tan^2 t\,dt = \int t\,(\tan t - t)'\,dt = t\,(\tan t - t) - \int (\tan t - t)\,dt$$
$$= t\,(\tan t - t) + \log|\cos t| + \frac{1}{2}t^2$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\arctan^2 x + \log|\cos\arctan x|$$

(72) $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x}$: $\dfrac{\sin x}{3+\tan^2 x} = -\dfrac{(\cos x)'}{3+\tan^2 x}$ と見る。$\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ は cos で表されるので $t = \cos x$ とおくと…。

$$\int \frac{\sin x}{3+\tan^2 x}\,dx = -\int \frac{t^2}{2t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{2}\int dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}t$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cos x\right) - \frac{1}{2}\cos x$$

(73) $\log(1+\sqrt{x})$: $t = \sqrt{x}$ とおくと…。

$$\int \log(1+\sqrt{x})\,dx = 2\int t\log(t+1)\,dt = \int \left(t^2\right)'\log(t+1)\,dt = t^2\log(t+1) - \int \frac{t^2}{t+1}\,dt$$
$$= t^2\log(t+1) - \int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$x\log(\sqrt{x}+1)$$

(74) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$: $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくと $t^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$ より $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdots$。

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = -\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{4}{(1+t^2)^2}\,dt - \int \frac{4}{1+t^2}\,dt$$

漸化式 $J_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{t^2+1} + J_1\right)$ を用いて

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\arctan t = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

(75) $3x^2(x^3+5)^6$: 展開して計算しても勿論できますが，$t = x^3+5$ とおくと…。

$$\int 3x^2(x^3+5)^6\,dx = \int t^6\,dt = \frac{(x^3+5)^7}{7}$$

(76) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}$: 「ルートの中の 2 次式」。$\sqrt{2+x-x^2} = t(2+x)$ とおくと…。

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{t^2+4}\,dt = -\arctan\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$-\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-x}1+x\right)$$

(77) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$: $x = a\sin t$ とおくと…。

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \sin^2 t\,dt = a^2\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

(78) $e^{ax}\cos bx$：

(79) $e^{ax}\sin bx$：2 つまとめて考える。

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

とおく。部分積分を行うことにより

$$I_1 = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2$$

を得る。同様に

$$I_2 = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx + \frac{b}{a}I_1$$

が分かるので，連立方程式を解いて

$$I_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\big(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx\big), \quad I_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\big(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx\big)$$