

演習問題 2.9 命題 3.9 を証明せよ。

演算子を

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

し、微分方程式を

$$Ly = 0 \tag{1}$$

とする。微分の線型性より $D(ay) = aDy$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(ay) = D(D(ay)) = D(aDy) = aD(Dy) = aD^2y$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(ay) = aD^ky$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(ay) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(ay) \\ &= a_n(x)D^n(ay) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(ay) + \cdots + a_1(x)D(ay) + a_0(x)(ay) \\ &= aa_n(x)D^ny + aa_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + aa_1(x)Dy + aa_0(x)y \\ &= a(a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y) \\ &= a(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y \\ &= aLy \end{aligned}$$

が成立する。よって y が線型微分方程式 (1) の解ならば ay も (1) の解である。

微分の線型性より $D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2$ が成立している。さらに D を作用させることにより $D^2(y_1 + y_2) = D(D(y_1 + y_2)) = D(Dy_1 + Dy_2) = DDy_1 + DDy_2 = D^2y_1 + D^2y_2$ が成立することが分かる。以下同様に D を作用させることにより自然数 k に対し $D^k(y_1 + y_2) = D^ky_1 + D^ky_2$ が成立する。よって

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^n(y_1 + y_2) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(y_1 + y_2) + \cdots + a_1(x)D(y_1 + y_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)(D^ny_1 + D^ny_2) + a_{n-1}(x)(D^{n-1}y_1 + D^{n-1}y_2) + \cdots + a_1(x)(Dy_1 + Dy_2) + a_0(x)(y_1 + y_2) \\ &= a_n(x)D^ny_1 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_1 + \cdots + a_1(x)Dy_1 + a_0(x)y_1 \\ &\quad + a_n(x)D^ny_2 + a_{n-1}(x)D^{n-1}y_2 + \cdots + a_1(x)Dy_2 + a_0(x)y_2 \\ &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_1 \\ &\quad + (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))y_2 \\ &= Ly_1 + Ly_2 \end{aligned}$$

が成立する。よって y_1 および y_2 が線型微分方程式 (1) の解ならば $y_1 + y_2$ も (1) の解である。

演習問題 2.10 次の微分方程式を演算子法を用いて解け。ただし解関数は複素数値関数でもよいとする。

$$(1) y' + y \sin x = 0$$

$$(3) y' + e^{2x}y = 0$$

$$(5) y'' - y' - 6y = 0$$

$$(7) y'' + 4y = 0$$

$$(9) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$(2) y' + (x+1)y = 0$$

$$(4) y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(6) y'' + y = 0$$

$$(8) y'' - 2y' + y = 0$$

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + \sin x)y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int \sin x dx = -\cos x$ より

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} = D + \sin x$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{\cos x} D e^{-\cos x} y = 0$$

となる。両辺に左から $e^{-\cos x}$ をかけると

$$D(e^{-\cos x})y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-\cos x} y = C$$

となるので

$$y = C e^{\cos x}$$

である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + (x+1))y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = D + (x+1)$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) D \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$ をかけると

$$D\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\right)y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + e^{2x})y = 0$$

と書き直すことができる。 $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ より

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = D + e^{2x}$$

が成立する。よって微分方程式は

$$\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right) D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺に左から $\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$ をかけると

$$D \exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = 0$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) y = C$$

となるので

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 5D + 6 = (D-3)(D-2)$ なので微分方程式は $(D-3)(D-2)y = 0$ となる。 $u = (D-2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D-3)u = 0$ となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} u = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $D e^{-3x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-2)y = C_1 e^{3x}$$

となる。

$$e^{2x}De^{-2x} = D - 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{2x}De^{-2x}y = C_1e^{3x}$ となるが、両辺に左から e^{-2x} をかけると $De^{-2x}y = C_1e^x$ となる。両辺を積分すると $e^{-2x}y = C_1e^x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

となる。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - D - 6 = (D - 3)(D + 2)$ なので微分方程式は $(D - 3)(D + 2)y = 0$ となる。 $u = (D + 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 3)u = 0$ となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-3x}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{3x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1e^{3x}$$

となる。

$$e^{-2x}De^{2x} = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x}De^{2x}y = C_1e^{3x}$ となるが、両辺に左から e^{2x} をかけると $De^{2x}y = C_1e^{5x}$ となる。両辺を積分すると $e^{2x}y = \frac{C_1}{5}e^{5x} + C_2$ となるので $y = \frac{C_1}{5}e^{3x} + C_2e^{-2x}$ となる。 $\frac{C_1}{5}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

となる。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 1 = (D - i)(D + i)$ なので微分方程式は $(D - i)(D + i)y = 0$ となる。 $u = (D + i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - i)u = 0$ となる。

$$e^{ix}De^{-ix} = D - i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{ix}De^{-ix}u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-ix} をかけると $De^{-ix}u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-ix}u = C_1$ となるので

$$u = C_1e^{ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + i)y = C_1 e^{ix}$$

となる。

$$e^{-ix} D e^{ix} = D + i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-ix} D e^{ix} y = C_1 e^{ix}$ となるが、両辺に左から e^{ix} をかけると $D e^{ix} y = C_1 e^{2ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{ix} y = \frac{C_1}{2i} e^{2ix} + C_2$ となるので $y = \frac{C_1}{2i} e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ となる。

$\frac{C_1}{2i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

となる。

(7) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4 = (D - 2i)(D + 2i)$ なので微分方程式は $(D - 2i)(D + 2i)y = 0$ となる。 $u = (D + 2i)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 2i)u = 0$ となる。

$$e^{2ix} D e^{-2ix} = D - 2i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{2ix} D e^{-2ix} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-2ix} をかけると $D e^{-2ix} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-2ix} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{2ix}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2i)y = C_1 e^{2ix}$$

となる。

$$e^{-2ix} D e^{2ix} = D + 2i$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2ix} D e^{2ix} y = C_1 e^{2ix}$ となるが、両辺に左から e^{2ix} をかけると $D e^{2ix} y = C_1 e^{4ix}$ となる。両辺を積分すると $e^{2ix} y = \frac{C_1}{4i} e^{4ix} + C_2$ となるので $y = \frac{C_1}{4i} e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$ となる。 $\frac{C_1}{4i}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}$$

となる。

(8) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D + 1 = (D - 1)(D - 1)$ なので微分方程式は $(D - 1)(D - 1)y = 0$ となる。 $u = (D - 1)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D - 1)u = 0$ となる。

$$e^x D e^{-x} = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^x D e^{-x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{-x} をかけると $D e^{-x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^x$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 1)y = C_1 e^x$$

となる。

$$e^x D e^{-x} y = D - 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^x D e^{-x} y = C_1 e^x$ となるが、両辺に左から e^{-x} をかけると $D e^{-x} y = C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{-x} y = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

となる。

(9) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

と書き直すことができる。 $D^2 + 4D + 4 = (D + 2)(D + 2)$ なので微分方程式は $(D + 2)(D + 2)y = 0$ となる。 $u = (D + 2)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D + 2)u = 0$ となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} u = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} u = 0$ となるが、両辺に左から e^{2x} をかけると $D e^{2x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{2x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{-2x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D + 2)y = C_1 e^{-2x}$$

となる。

$$e^{-2x} D e^{2x} y = D + 2$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-2x} D e^{2x} y = C_1 e^{-2x}$ となるが、両辺に左から e^{2x} をかけると $D e^{2x} y = C_1$ となる。両辺を積分すると $e^{2x} y = C_1 x + C_2$ となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

となる。

演習問題 2.11 次の微分方程式を実数値関数の範囲で解け。

(1) $y'' + y = 0$

(2) $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (0 \neq \omega \in \mathbb{R})$

(3) $y'' - y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(1) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて変形する。
 $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$ なので

$$\begin{aligned} y &= C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos x + (iC_1 - iC_2) \sin x \end{aligned}$$

と書ける。 $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x$$

が得られる。

(2) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$\begin{aligned} y &= C_1 (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 (\cos \omega x - i \sin \omega x) \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega x + (iC_1 - iC_2) \sin \omega x \end{aligned}$$

と書ける。 $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \cos \omega x + A_2 \sin \omega x$$

が得られる。

(3) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと，一般解として

$$y = C_1 \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}x}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ \exp\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right) &= \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}x}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - i \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}y &= C_1 \exp\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - i \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \\ &= (C_1 + C_2) \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + (iC_1 - iC_2) \exp\left(\frac{x}{2}\right) \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\end{aligned}$$

と書ける。 $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + A_2 \exp\left(\frac{x}{2}\right) \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

が得られる。

(4) 微分方程式を複素数値関数の範囲で解くと、一般解として

$$y = C_1 \exp((1+i)x) + C_2 \exp((1-i)x)$$

が得られる (前問と同様なので詳細省略)。

$\exp((1+i)x) = e^x e^{ix} = e^x (\cos x + i \sin x)$ 等より

$$\begin{aligned}y &= C_1 e^x (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x) \\ &= (C_1 + C_2) e^x \cos x + (iC_1 - iC_2) e^x \sin x\end{aligned}$$

と書ける。 $A_1 = C_1 + C_2$, $A_2 = iC_1 - iC_2$ とおくと

$$y = A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x$$

が得られる。

演習問題 2.12 次が成立することを示せ。

2次式 $\varphi(t) = t^2 + at + b$ に対し方程式 $\varphi(t) = 0$ は解 α, β を持つとする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

を考える。この微分方程式の一般解は $\alpha \neq \beta$ のとき

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

であり、 $\alpha = \beta$ のとき

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

$\varphi(t) = 0$ の2解を α, β とすると $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ が成立する。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが、両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $D e^{-\alpha x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが、両辺に左から $e^{-\beta}$ をかけると

$$D e^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha-\beta)x}$$

となる。

ここで場合分けを行う。 $\alpha \neq \beta$ のときは両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\frac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$\alpha = \beta$ のときは $e^{(\alpha-\beta)x} = 1$ なので両辺を積分すると

$$e^{-\alpha x} y = C_1 x + C_2$$

となるので一般解は

$$y = C_1 x e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}$$

である。

演習問題 2.13 次が成立することを示せ。

$\varphi(t) = t^2 + at + b = 0$ は実数解を持たないとする。 $\varphi(t) = 0$ の複素解を $\lambda_1 \pm i\lambda_2$ とする。微分方程式

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

の実数値関数としての一般解は

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

である。ここで C_1, C_2 は実数である任意定数。

$\varphi(t) = 0$ の 2 解を α, β とすると $\varphi(t) = (t - \alpha)(t - \beta)$ が成立する。ただしここで $\alpha = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\beta = \lambda_1 - i\lambda_2$ とする。このとき

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

が成立する。 $u = (D - \beta)y$ とおくと u に関する微分方程式は

$$(D - \alpha)u = 0$$

となる。 $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} = D - \alpha$ より $e^{\alpha x} D e^{-\alpha x} u = 0$ となるが、両辺に左から $e^{-\alpha x}$ をかけると $D e^{-\alpha x} u = 0$ となる。両辺を積分すると $e^{-\alpha x} u = C_1$ となるので

$$u = C_1 e^{\alpha x}$$

となる。よって y についての微分方程式は $(D - \beta)y = C_1 e^{\alpha x}$ となる。

$$e^{\beta x} D e^{-\beta x} = D - \beta$$

が成立するので微分方程式は $e^{\beta x} D e^{-\beta x} y = C_1 e^{\alpha x}$ となるが、両辺に左から $e^{-\beta x}$ をかけると

$$D e^{-\beta x} y = C_1 e^{(\alpha - \beta)x}$$

となる。両辺を積分すると

$$e^{-\beta x} y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha - \beta)x} + C_2$$

となるのでとなる。

$$y = \frac{C_1}{\alpha - \beta} e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

$\frac{C_1}{\alpha - \beta}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

となる。

$$e^{\alpha x} = e^{(\lambda_1 + i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x + i \sin \lambda_2 x)$$

$$e^{\beta x} = e^{(\lambda_1 - i\lambda_2)x} = e^{\lambda_1 x} e^{-i\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x)$$

なので、これを用いると

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x + i \sin \lambda_2 x) + C_2 e^{\lambda_1 x} (\cos \lambda_2 x - i \sin \lambda_2 x) \\ &= (C_1 + C_2) e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + (iC_1 - iC_2) e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x \end{aligned}$$

と書ける。 $C_1 + C_2$ を C_1 に、 $iC_1 - iC_2$ を C_2 に、あらためて置き直すと

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos \lambda_2 x + C_2 e^{\lambda_1 x} \sin \lambda_2 x$$

が得られる。

演習問題 2.14 次の微分方程式を解け。

$$(1) \frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + x$$

$$(4) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x + 4$$

$$(5) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \sin x$$

$$(6) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$$

非同次型は直接演算子法でもできるし、ここで紹介した、同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることによってもできる。ここでは2通りの方法を述べる。

(1) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。

$$e^{3x}De^{-3x}y = D - 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{3x}De^{-3x}y = e^{2x}$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D(e^{-3x})y = e^{-x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{-3x}y = -e^{-x} + C$$

となるので

$$y = -e^{2x} + Ce^{3x}$$

である。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

同次型の一般解は e^{2x} を 0 に変更して同様に計算すればできるので省略する。各自計算すること。ここでは結果だけ使用する。 $(D - 3)y = 0$ の一般解は $y_1 = Ce^{3x}$ である。

$(D - 3)y = e^{2x}$ の特殊解は $y_2 = Ae^{2x}$ の形をしていると予想する。 $Dy_2 = 2Ae^{2x}$ なので

$$(D - 3)y_2 = Dy_2 - 3y_2 = 2Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = -Ae^{2x} = e^{2x}$$

より、 $A = -1$ なので特殊解は $y_2 = -e^{2x}$ である。よって求める解は $y = y_1 + y_2 = Ce^{3x} - e^{2x}$ である。

(2) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D + 2)y = \sin x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-2x}De^{2x}y = D + 2$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-2x}De^{2x}y = \sin x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D(e^{2x})y = e^{2x} \sin x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{2x}y = \frac{2}{5}e^{2x} \sin x - \frac{1}{5}e^{2x} \cos x + C$$

となるので

$$y = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + Ce^{-2x}$$

である。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

$(D+2)y=0$ の一般解を y_1 とすると $y_1 = Ce^{-2x}$ である (これも各自計算すること)。

$(D+3)y = \sin x$ の特殊解 y_2 を $y_2 = A \sin x + B \cos x$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+2)y_2 &= Dy_2 + 2y_2 = A \cos x - B \sin x + 2A \sin x + 2B \cos x \\ &= (2A - B) \sin x + (A + 2B) \cos x\end{aligned}$$

である。これが $\sin x$ になるためには $2A - B = 1, A + 2B = 0$ であればよい。よって $A = \frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}$ となるので, $y_2 = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$ である。よって解は

$$y = y_1 + y_2 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$$

である。

(3) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D+3)y = x^2 + x$$

と書き直すことができる。

$$e^{-3x}De^{3x}y = D + 3$$

が成立する。よって微分方程式は

$$e^{-3x}De^{3x}y = x^2 + x$$

となる。両辺に左から e^{-3x} をかけると

$$D(e^{3x})y = e^{3x}(x^2 + x)$$

となる。両辺を x で積分すると

$$e^{3x}y = \frac{1}{3}e^{3x}x^2 + \frac{1}{9}e^{3x}x - \frac{1}{27}e^{3x} + C$$

となるので

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27} + Ce^{-3x}$$

である。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

$(D+3)y=0$ の一般解を y_1 とすると $y_1 = Ce^{-3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D+3)y = x^2 + x$ の特殊解 y_2 を $y_2 = Ax^2 + Bx + C$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D+3)y_2 &= Dy_2 + 3y_2 = 2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C \\ &= 3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C = x^2 + x\end{aligned}$$

より $3A = 1, 2A + 3B = 1, B + 3C = 0$ を得る。これを解くと $A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{9}, C = -\frac{1}{27}$ より $y_2 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$ となる。よって

$$y = y_1 + y_2 = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{27}$$

である。

(4) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = x+4$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = x+4$ となる。

$$e^{-x}De^x = D+1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x}De^xu = x+4$ となるが、両辺に左から e^x をかけると $De^xu = (x+4)e^x$ となる。両辺を積分すると $e^xu = xe^x + 3e^x + C_1$ となるので

$$u = x + 3 + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = x + 3 + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D-3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = x + 3 + C_1e^{-x}$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y = xe^{-3x} + 3e^{-3x} + C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x}y = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{10}{9}e^{-3x} - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$ となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9} + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

$(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解を y_1 とすると, $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D^2 - 2D - 3)y = x + 4$ の特殊解を $y_2 = Ax + B$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D - 3)y_2 &= D^2y_2 - 2Dy_2 - 3y_2 = -2A - 3Ax - 3B \\ &= -3Ax + (-2A - 3B) = x + 4\end{aligned}$$

より $-3A = 1, -2A - 3B = 4$ を得る。これを解くと $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{10}{9}$ となる。 $y_2 = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$ なので

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{10}{9}$$

である。

(5) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = \sin x$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = \sin x$ となる。

$$e^{-x}De^x = D + 1$$

が成立するので, 微分方程式は $e^{-x}De^xu = \sin x$ となるが, 両辺に左から e^x をかけると $De^xu = e^x \sin x$ となる。両辺を積分すると $e^xu = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + C_1$ となるので

$$u = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D - 3)y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x}De^{-3x} = D - 3$$

が成立するので, 微分方程式は $e^{3x}De^{-3x}y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C_1e^{-x}$ となるが, 両辺に左から e^{-3x} をかけると $De^{-3x}y = \frac{1}{2}e^{-3x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-3x} \cos x + C_1e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると x

$$e^{-3x}y = \frac{1}{10}e^{-3x} \cos x - \frac{1}{5}e^{-3x} \sin x - \frac{C_1}{4}e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x - \frac{C_1}{4}e^{-x} + C_2e^{3x}$ となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

となる。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

$(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解 y_2 は $y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ である (各自計算せよ)。

$(D^2 - 2D - 3)y = \sin x$ の特殊解を $y_2 = A \cos x + B \sin x$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D - 3)y_2 &= D^2 y_2 - 2D y_2 - 3y_2 \\ &= -A \cos x - B \sin x + 2A \sin x - 2B \cos x - 3A \cos x - 3B \sin x \\ &= (-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \sin x\end{aligned}$$

より $B + 2A = 0, 2A - 4B = 1$ を得る。よって $A = \frac{1}{10}, B = -\frac{1}{5}$ なので解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$$

である。

(6) 与えられた微分方程式は演算子を用いて

$$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$$

と書き直すことができる。 $D^2 - 2D - 3 = (D+1)(D-3)$ なので微分方程式は $(D+1)(D-3)y = e^{2x}$ となる。 $u = (D-3)y$ とおくと u がみたす微分方程式は $(D+1)u = e^{2x}$ となる。

$$e^{-x} D e^x = D + 1$$

が成立するので、微分方程式は $e^{-x} D e^x u = e^{2x}$ となるが、両辺に左から e^x をかけると $D e^x u = e^{3x}$ となる。両辺を積分すると $e^x u = \frac{1}{3} e^{3x} + C_1$ となるので

$$u = \frac{1}{3} e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

である。よって y についての微分方程式は

$$(D-3)y = \frac{1}{3} e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

となる。

$$e^{3x} D e^{-3x} = D - 3$$

が成立するので、微分方程式は $e^{3x} D e^{-3x} y = \frac{1}{3} e^{2x} + C_1 e^{-x}$ となるが、両辺に左から e^{-3x} をかけると $D e^{-3x} y = \frac{1}{3} e^{-x} + C_1 e^{-4x}$ となる。両辺を積分すると

$$e^{-3x} y = -\frac{1}{3} e^{-x} - \frac{C_1}{4} e^{-4x} + C_2$$

となるので $y = -\frac{1}{3} e^{2x} - \frac{C_1}{4} e^{-x} + C_2 e^{3x}$ となる。 $-\frac{C_1}{4}$ をあらためて C_1 と置き直すと一般解は

$$y = -\frac{1}{3} e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

となる。

同次型の一般解と非同次型の特殊解を求めることで解を求める。

$(D^2 - 2D - 3)y = 0$ の一般解は $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ である。

$(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$ の特殊解 y_2 を $y_2 = Ae^{2x}$ と予想する。

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D - 3)y_2 &= D^2y_2 - 2Dy_2 - 3y_2 \\ &= 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} \\ &= -3Ae^{2x} = e^{2x}\end{aligned}$$

より $A = -\frac{1}{3}$ である。よって一般解は

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}e^{2x}$$

である。