解析学 II 要綱 #1　　2011–4–11　　河野

1　1 変数関数の定積分

解析学 I の不定積分の所でもふれたが，定積分は定義だけから見ると不定積分とは無関係である。定義としては無関係の両者の間に関係が成立する事 (微積分の基本定理) が積分の理論的把握のキーポイントである。この事については定義の後にもう一度ふれる。

定積分の考え方は，古代ギリシアの時代から，多角形ではない図形の面積を求める方法として考察の対象であった。そのことを次の受験問題を例に考える。

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

(2003　東京大学・理系)

次の解答は円周率の値を知っていることを前提にしているので証明にはならない。

[**間違った解答**] 円周率を π とすると $\pi = 3.14$ なので $\pi = 3.14 > 3.05$ である。よって証明された。

解答を考える前提として「円周率」とはどういうものだったのかということを再確認しておく。古代ギリシア時代にすでに「円の面積は半径の 2 乗に比例する」ことが証明されていた。式で書くと，円の半径を r，半径 r の円の面積を S とすると，$S \propto r^2$ が成立する。このときこの比例式の比例定数を**円周率**といい，通常 π で表す(1)。このとき $S = \pi r^2$ となる。π の値がどれくらいかはこの定義から直接には分からない。

今半径 $r = 1$ の円を考えると面積は $S = \pi$ である。円に内接する正 12 角形を考え，その面積を S_{12} とすると

$$\pi > S_{12}$$

が成立している。正 12 角形は辺の長さが 1 でなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ の 2 等辺 3 角形 12 個からできている。この 2 等辺 3 角形の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$ なので $S_{12} = 12 \times \dfrac{1}{4} = 3$ となるので

$$\pi > 3$$

が得られる。この議論は間違ってはいないが結論はやはり弱すぎる。

そこで更に半径 1 の円に内接する正 24 角形を考え，その面積を S_{24} とすると

$$\pi > S_{24}$$

(1)半径 r の円の円周の長さを L とするとき L は r に比例する。この比例定数の半分を円周率とするという定義も考えられるが，ここでは面積で考えることにする。

が成立している。正 24 角形は辺の長さが 1 でなす角が $\dfrac{\pi}{12}$ の 2 等辺 3 角形 24 個からできている。この 2 等辺 3 角形の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{12}$ である。ここで $\sin\dfrac{\pi}{12}$ を求める必要が生じる。この求め方はプリントの最後に書いてあるが，ここでは $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}$ であることを認めて議論を先に進めよう。$S_{24}=24\times\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ となるの。$\sqrt{2}>1.41$，$\sqrt{3}<1.74$ となるので

$$\pi > S_{24} > \frac{6\times 1.41}{1.74+1} = 3.087 > 3.05$$

が得られる。

問題は解決した。この方法は「周囲が線分ではない図形の面積を多角形で近似していく」考え方に基づいている。同様の方法で「上」から円周率を評価することもできる。半径 1 の円に外接する正 6 角形の面積を T_6 とする。正 6 角形は 6 個の正 3 角形からできているがこの 3 角形の面積は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である[2]。このとき

$$T_6 = 6\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} < 2\times 1.74 = 3.48$$

となる。以上より

$$3.05 < \pi < 3.48$$

が分かる。

長方形や 3 角形などの多角形の面積の概念は，古代メソポタミアやエジプトではすでに知られていたようである。多角形以外の図形の面積を求める努力も古くからなされていた。理論的解明として文献で確認できる最古のものとしては古代ギリシャがある。古代ギリシャのアルキメデスは放物線と直線に囲まれた部分の面積を求めている。アルキメデスは最初に述べた様な考え方で

$$3.14 < \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} < 3.143$$

を得ている。

面積に関する今での議論を分析すると，面積に関する次の性質が前提されていることが分かる。

平面の図形 X に対し面積と呼ばれる実数 $m(X)$ が対応し次の性質を満たす (ただし図形の中には面積を持たないものもある，例えば $\mathbb{R}^2$ など)。

(1) $m(X) \geqq 0$

(2) $X \subseteq Y \implies m(X) \leqq m(Y)$

(3) $m(X\cup Y) = m(X)+m(Y)-m(X\cap Y)$

(4) X を平行移動して得られる図形を X' とすると $m(X)=m(X')$ が成立する。

(5) X を回転移動して得られる図形を X' とすると $m(X)=m(X')$ が成立する。

(6) $X_0=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1\right\}$ とすると $m(X_0)=1$

[2] 各自確かめよ。

1.1 定義と性質

定積分もこれとほぼ同様の考えから出発している。

定義 1.1 f を区間 $[a,b]$ で定義された関数とする。区間 $[a,b]$ の**分割** Δ とは有限個の数の集合であり，$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ と書いたとき，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

を満たすものをいう。

各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し，この小区間から任意に点 c_i を選んでおく。

分割 Δ に対し

$$\Sigma(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

とおく。$\Sigma(\Delta; \{c_i\})$ は**リーマン和** (*Riemann sum*) と呼ばれる。

分割 Δ に対し $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ とする。分割 Δ の最大幅を $\|\Delta\|$ とする。即ち

$$\|\Delta\| = \max\{\, \Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n \,\}$$

である。

分割を一様に細かくしていったとき，$\Sigma(\Delta; \{c_i\})$ が $\{c_i\}$ の選び方によらず同じ極限値に収束するとき f は $[a,b]$ で **(定) 積分可能** (*integrable*) であるという。この極限値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。即ち $\displaystyle\lim_{\|\Delta\| \to 0} \Sigma(\Delta; \{c_i\}) = \int_a^b f(x)\,dx$ として定義される。

定義を見ると積分記号を現在の様に書くかが分かるかもしれない。

$$\Sigma(\Delta; \{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

積分可能な関数として次の定理が知られている。

定理 1.2

連続関数は積分可能である。

単調関数は積分可能である。

定理の証明を理解するためには，ε–δ 法と呼ばれる極限の厳密な定義を理解していて，更に一様連続という概念を理解している必要があるので，講義では証明は省略する。意欲ある学生のために星印付きの演習問題としておく。

演習問題 *1.1

I で定義された関数 $y = f(x)$ が次を満たすとき**一様連続**であるという。

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in I \quad |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

(1) 閉区間 $[\,a,\,b\,]$ で定義された関数が連続ならば一様連続であることを示せ。
(2) 連続な関数は積分可能であることを示せ。
(3) 単調関数は積分可能であることを示せ。

例 1.3 $y = f(x) = x^2$ とし，定義域は $[1, 2]$ とする。$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ を求めてみよう。定理 1.2 の成立は仮定して議論する。

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}$$

という計算法は**まだ使う事ができない**。定義から分かるように積分は定義では微分とは何ら関係がないからである。定義に基づいて計算しよう。

分割は等分割としよう。$[\,1,\,2\,]$ を n 等分する，即ち $\Delta_n = \left\{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n}\right\}$ とする。各小区間 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ において c_i を決める必要があるが，区間の右端，即ち $c_i = 1 + \frac{i}{n}$ とすることにしよう。$\Delta x_i = 1 + \frac{i}{n} - \left(1 + \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ なので

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Delta_n; \{c_i\}) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(1 + 2\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right)\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{n}n + \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる。計算途中で

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を用いた。$n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となるので

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty} \Sigma(\Delta_n; \{c_i\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

となる。(高校時代にすでに学んでいる) 不定積分を使う方法に比べると，複雑であるし，求める関数ごとにそれに対応した和公式 (今の場合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$) が必要になる。しかし微積分学成立以前の求積方 (面積を求める方法) はこの様であった。

演習問題 1.2　次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。定理 1.2 の成立は仮定する。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

[$\sin\frac{\pi}{12}$ **の求め方**]　基本になるのは三角関数の加法定理と $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} &= 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} &= 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 \end{aligned}$$

が成立している。ここで $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ なので $\cos\frac{\pi}{12} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ となるが, $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ より $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ となる。ここで 2 重根号をはずす。$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{a+b}{2}$ とおき 2 乗すると

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

となる。$a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{2}}$ とおくと式は成立するので $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ となる。これを最初に式に代入すると $\frac{1}{2} = 2\sin\frac{\pi}{12}\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ となるので

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

となる。