解析学 II 要綱 #2　　　　2011–4–18　　　　河野

## 1.2　定積分の基本性質

積分の基本的な性質を確認しながら，微積分の基本定理 (定理 1.8) の証明を目指そう。積分では次の性質が基本的である。

**命題 1.4**　(1) [**線型性**] $f$, $g$ が積分可能であるときその和・実数倍として定義される関数も積分可能で次が成り立つ。

$$1)\ \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$2)\ \int_a^b \{\alpha f(x)\}\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) [**区間線型性**] 関数 $f$ が区間 $[a,c]$, $[c,b]$ で積分可能ならば，区間 $[a,b]$ でも積分可能であり，次が成立する。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(3) [**単調性**] 関数 $f$, $g$ が区間 $[a,b]$ で積分可能とする。任意の $x \in [a,b]$ に対し $f(x) \leqq g(x)$ となるとき次が成立する。

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

(4) [**単位の値**] 値が 1 である定数関数 $\tau$ は任意の閉区間 $[a,b]$ で積分可能であり，次が成立する。

$$\int_a^b \tau(x)\,dx = b-a$$ (1)

証明の前に 2 つ注意をしておこう。「基本的」という意味はこの 4 つの性質から積分が一意的に定まる事を意味する。即ち，関数 $f$ と区間 $[a,b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f,[a,b])$ がこの 4 つの性質を持つとき，この $J$ は定義 1.1 で定義した積分と一致する (演習問題 1.4)。

関数 $f$, $g$ が積分可能であるとき，その積 $fg$ も積分可能である。しかしその積を求める「**積の積分法**」(2) なるものは存在しない。これも積分の計算を複雑にしている 1 つの原因である。

**命題 1.4 の略証**　1 つ示してあとは演習問題に残しておく。(3) を示そう。分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ に対し $\Sigma_f(\Delta;\{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$，$\Sigma_g(\Delta;\{c_i\}) = \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i$ とおくと，任意の $i$ について $f(c_i) \leqq g(c_i)$ が成立しているので，$\Sigma_f(\Delta;\{c_i\}) \leqq \Sigma_g(\Delta;\{c_i\})$ が成立する。ここで $\|\Delta\| \to 0$ と

(1) 通常 $\int_a^b 1\,dx$ と書く。また 1 を略して $\int_a^b dx$ と書く事もある。

(2) 毎年のテストでは，存在しないはずの「**積の積分法**」を用いて計算するものがある程度存在する。この用語は例えば次の様な**誤った**計算法を指している。$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{\log(x^4)}{4x^3}$

すると両辺は収束し，極限においても不等号が成立するので，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$ が成立する。 ∎

**演習問題 1.3**　命題 1.4 を証明せよ[3]。

**演習問題 *1.4**　関数 $f$ と区間 $[a,b]$ に対し実数を対応される対応 $J(f,[a,b])$ が命題 1.4 の 4 つの性質を持つとき，この $J$ は定義 1.1 で定義した積分と一致する事を示せ。

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ において $a$ を**下端**，$b$ を**上端**というが $b \leqq a$ の場合にも積分を拡張しておく。
$a=b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

$b<a$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定義する。拡張した意味での積分に対して前述の基本性質の (1),(2),(4) は成立する。(3) は成立しない ($b \leqq a$ のときは不等号が逆になる)。

関数の**平均値**というものを定義しよう。有限個の量の平均はそれらを足してその個数で割る事で定義された。関数の平均値はその極限と考えられる。区間 $[a,b]$ で定義された (積分可能な) 関数 $f$ を考える。区間を $n$ 等分して $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$ とする。ここで定義 1.1 のリーマン和で $c_i = x_i$ とおくと，

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{b-a}{n} = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

となる。両辺を $b-a$ で割って極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

が得られる。この値を平均値という。
連続の場合平均値はある点の関数値で与えられる。

---

[3] **注意**： この証明を課題に出すと微積分の基本定理を前提にした，次の様な間違った「証明」をする学生がいる。例えば (1)–1)。$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分，$G(x)$ を $g(x)$ の不定積分とすると，$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$ である。$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$ なので，$f(x)+g(x)$ の不定積分は $F(x)+G(x)$ である。よって $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b + \Big[G(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ となる。**これは誤った証明である。**理由が分からないものは，よく分かっている友人に聞くが私に質問してください。

**定理 1.5** [**積分の平均値の定理**] 関数 $f$ は $[a,b]$ で連続とする。このときある $c$ $(a<c<b)$ が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

が成立する。

**証明**　関数 $f$ の最大値を $M$，最小値を $L$ とする。$L \leqq f(x) \leqq M$ より

$$\int_a^b L\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx$$

が分かる。3 辺を $b-a$ で割ると

$$L \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

が得られる。中間値の定理からある $c$ $(a<c<b)$ が存在して $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ が成立する。∎

$c$ を $c = a+\theta(b-a)$ という形に書いておくと，$b>a$ の場合にも平均値の定理が成立する。そのとき勿論区間は $[b,a]$ であるが。

**定理 1.6** [**積分の平均値の定理**] 連続な関数 $f$ と $a,b$ に対し $\theta$ $(0<\theta<1)$ が存在して

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(a+\theta(b-a))$$

が成立する。