

1.3 微積分の基本定理

命題 1.7 関数 f は $[a, b]$ で連続とする。 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ ⁽¹⁾⁽²⁾ とおくと, $F'(x) = f(x)$ が成立する。即ち $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ は $f(x)$ の原始関数である。

証明 $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_a^{x+h} f(x) dx + \int_x^a f(x) dx = \int_x^{x+h} f(x) dx$ より, 積分の平均値の定理を用いると, ある c が存在して $F(x+h) - F(x) = f(c)h$ と書ける。ここで h は x と $x+h$ の間の実数。 $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$ を得る。

定理 1.8 [微積分の基本定理] 関数 f は $[a, b]$ で連続とする。 G を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

が成立する。

証明 G は f の原始関数なので $G'(x) = f(x)$ が成立している。命題 1.7 より $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ も $F'(x) = f(x)$ を満たす。 $H(x) = F(x) - G(x)$ とおくと, $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, よって $H(x)$ は定数である。これを C とおくと, $F(x) = G(x) + C$ である。これに $x = a$ を代入すると, $F(a) = 0$ なので, $0 = G(a) + C$, よって $C = -G(a)$ となる。 $F(x) = G(x) - G(a)$ に $x = b$ を代入すると求める式が得られる。 ■

$G(b) - G(a)$ を $\left[G(x) \right]_a^b$ とも書く。この定理により, 連続な関数の積分計算において不定積分を用いた計算が可能になる。この定理を用いると

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

という高校時代から行っている計算が可能になる。

ここで連続というのは重要な制限であって, 連続でない関数に適用してはいけない。例えば次の計算は間違いである⁽³⁾。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\log |x| \right]_{-1}^1 = \log |1| - \log |-1| = \log 1 - \log 1 = 0$$

⁽¹⁾テキストではこの形のことを不定積分と呼び, 原始関数と区別している。この講義ではこの定義は採用せず, 不定積分と原始関数は特に区別しない事にする。

⁽²⁾積分 dx の x と上端の値 x が同じ x で表されている事に違和感を感じる人もいるかもしれない。 dx の方の x を別の文字に変えても式の意味は変わらない。例えば $\int_a^x f(t) dt$ は元の式と同じである。

⁽³⁾テストでこの様な間違った計算をするものがある。少なくともこの footnote を見た学生はこの様な間違いをしないでほしい。

被積分関数が連続のとき不定積分の所で扱った定理を適用できる。特に積分に関して部分積分法、置換積分法を使用できる。被積分関数の連続性を保証するため、 C^1 級等の条件が必要になる点に注意する事。解析学 I で学んだように、関数 f が C^1 級とは導関数 f' が連続と定義された。

定理 1.9 [部分積分法] f, g が C^1 級のとき次が成立する。

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

定理 1.10 [置換積分法] f は連続, $x = \varphi(t)$ は C^1 級とする。 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ とすると次が成立する。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

定理 1.9 の証明： $F(x) = \int f'(x)g(x) dx$, $G(x) = \int f(x)g'(x) dx$ と置くと不定積分の部分積分法より

$$F(x) = f(x)g(x) - G(x)$$

が成立している。 x に a 及び b を代入すると

$$F(b) = f(b)g(b) - G(b), \quad F(a) = f(a)g(a) - G(a)$$

が成立している。被積分関数は連続なので微積分の基本定理より

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x) dx &= F(b) - F(a) = f(b)g(b) - G(b) - (f(a)g(a) - G(a)) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - (G(b) - G(a)) \\ &= \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

が成立する。 ■

定理 1.10 の証明： $F(x) = \int f(x) dx$, $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ とおくと、不定積分の置換積分法より、 x と t は $x = \varphi(t)$ の関係にあるとき $F(x) = G(t)$ が成立している。 $a = \varphi(\alpha)$ 及び $b = \varphi(\beta)$ より $F(a) = G(\alpha)$ 及び $F(b) = G(\beta)$ が成立している。被積分関数は連続なので微積分の基本定理より

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = G(\beta) - G(\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \end{aligned}$$

が成立する。 ■

例 1.11 (1) 部分積分法： $I = \int_0^1 x \arctan x dx$ を計算する。

$t = \arctan x$ は「 $x = \tan t$ かつ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 」と同値であるから, $\arctan 0 = 0, \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ である。 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ である事に注意する。

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctan x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{1+x^2} dx$$

を得る。ここで

$$J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[x\right]_0^1 - \left[\arctan x\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

なので $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ である。

(2) 置換積分法: $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ を計算する。 $x = \sin t$ とおくと, $x: 0 \rightarrow 1$ のとき $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ である。 $x' = \cos t$ なので

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos 2t + 1\} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

を得る。

被積分関数が偶関数または奇関数で積分領域が $[-a, a]$ の場合は少し計算が簡単になる。ここで $f(x)$ が偶関数とは任意の x に対し $f(-x) = f(x)$ が成立することであり, 奇関数とは $f(-x) = -f(x)$ が成立することをいう。このとき次が成立する。

命題 1.12

(1) $f(x)$ が偶関数のとき $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ が成立する。

(2) $f(x)$ が奇関数のとき $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ が成立する。

(1) の証明: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ が成立する。ここで $x = \varphi(t) = -t$ とおき, 右辺の最初の式を置換積分する。 $\varphi'(t) = -1$ であり, $-a = \varphi(a), 0 = \varphi(0)$ なので, $f(x)$ が偶関数に注意すると

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-t)(-1) dt = - \int_a^0 f(-t) dt \\ &= - \int_a^0 f(t) dt = (-1) \times (-1) \int_0^a f(t) dt \\ &= \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

となる。(2) は演習問題とする。 ■

演習問題 1.5 命題 1.12 を証明せよ。

演習問題 1.6 次の定積分を微積分の基本定理を用いて計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{4x - 3}{(x^2 + 1)(x - 2)^2} dx$$

$$(3) \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$(4) \int_0^1 \arctan x dx$$

$$(5) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^3 x - \sin x) dx$$

$$(6) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx$$

ここで微分，不定積分，定積分の関係について述べておこう。解析学 I で学んだように「不定積分 = 微分の逆」であった。積分は，分割に対しリーマン和を考え，分割を細かくしているときの極限として定義された。確認すべき第 1 の点として，定義としては「定積分」と「不定積分」の間に関係が見当たらない，むしろ無関係に見えるという事がある。第 2 の点としては，その定義としては無関係に見える両者が「連続関数の場合は密接な関係を持つ」というのが微積分の基本定理であり，「その発見 = 微積分学の成立」と言ってよい重要な内容であるということがある。第 3 番目に指摘しておきたいのは，一見無関係に見える積分と微分の定義であるが，よく見ると密接に関連している事が分かる。 $F(x)$ をある関数として， $f(x) = F'(x)$ とする。 $f(x)$ の $[0, a]$ における積分を考える。分割を $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ とする。小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の内部に点 c_i をとり， $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ とおき，リーマン和 $\Sigma(\Delta) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ を考える。図 1.1 は $F(x) = x^2, f(x) = 2x$ を想定して描いてある。 $f(c_i)\Delta x_i$ は小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における $F(x)$ の増分を近似していると考えられる。その和なので $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ は小区間の増分の和，即ち前区間における増分を表していると考えられる。以上により $\|\Delta\| \rightarrow 0$ とするとき， $\Sigma(\Delta) \rightarrow F(a) - F(0)$ となる事が予想される。

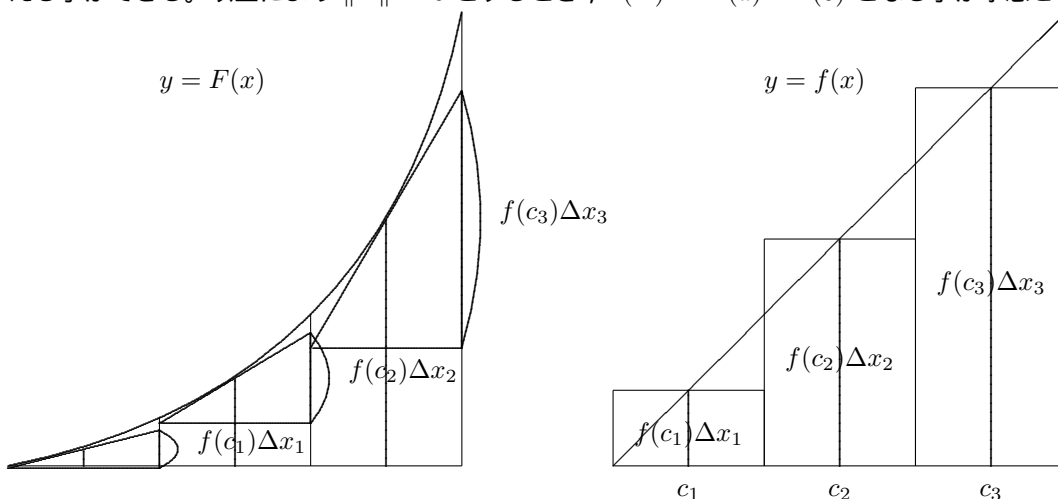


図 1.1