

1.4 広義積分

積分の定義においては関数は有界であり、積分区間も有界な閉区間であった。ここではその制限をはずせる場合にはずし、積分の意味を拡張する。これらは広義積分と呼ばれる。

例から始めよう。関数 $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 1 から M まで f を積分したものを $I(M)$ とすると、

$$I(M) = \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

となる。ここで $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx = 1$ となるので、 $\int_1^{\infty} f(x) dx = 1$ と書く事が許されるだろう。

関数 $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ を $x > 0$ の部分で考える。今 ε から 1 まで f を積分したものを $J(\varepsilon)$ とすると、

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

となる。ここで $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} J(\varepsilon) = 2$ となるので、 $\int_0^1 f(x) dx = 2$ と書く事が許されるだろう。

以上の例から次を定義する。幾つかの type があるが、最後に一般的な形を扱う。

定義 1.13

(1) 関数 f は $(a, b]$ で連続とする。 $I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ とおく。 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束する」という。

(2) 関数 f は $[a, b)$ で連続とする。 $I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ とおく。 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I(\varepsilon)$ が収束するとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束する」という。

(3) 関数 f は $[a, \infty)$ で連続とする。 $I(M) = \int_a^M f(x) dx$ とおく。 $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M)$ が収束するとき

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ は収束する」という。

(4) 関数 f は $(-\infty, b]$ で連続とする。 $I(N) = \int_N^b f(x) dx$ とおく。 $\lim_{N \rightarrow -\infty} I(N)$ が収束するとき

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

と定義する。このとき「広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ は収束する」という。

(5) 関数 f は有限個の点 a_1, \dots, a_n を除いて (A, B) で連続とする。ただし $A = -\infty, B = \infty$ の場合も含むとする。 $n+1$ 個の点 c_0, c_1, \dots, c_n を $c_0 < a_1 < c_1 < a_2 < \dots < a_n < c_n$ となる様にとる。次のすべての広義積分が収束するとき、広義積分 $\int_A^B f(x) dx$ は収束するという。

$$\int_A^{c_0} f(x) dx, \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x) dx, \int_{a_i}^{c_i} f(x) dx, \int_{c_n}^B f(x) dx$$

広義積分の値はこれらのすべての和で定義する。即ち

$$\int_A^B f(x) dx = \int_A^{c_0} f(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{a_i} f(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{c_i} f(x) dx + \int_{c_n}^B f(x) dx$$

で定義する。

例 1.14

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$: この広義積分は (5) のタイプである。分点 c_0 として 0 を選ぶ。 $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$,

$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$ が共に収束していれば値が求まる。 $I(M) = \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx$ する。 $x = \tan t$

とおき置換積分を行う。 $0 = \arctan 0$ である。また $M' = \arctan M$ とおくと、 $dx = (1+x^2)dt$

なので、 $I(M) = \int_0^{M'} \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) dt = \int_0^{M'} dt = M'$

$M \rightarrow \infty$ のとき、 $M' \rightarrow \frac{\pi}{2}$ となるので、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \lim_{M' \rightarrow \frac{\pi}{2}} M' = \frac{\pi}{2}$$

$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$ も同様に計算できて $\frac{\pi}{2}$ となる。

(2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$: (1) は積分区間を見ると、広義積分である事が分かったが、この場合は被積分関数を見る必要がある。この関数は区間の両端で無限大となるので、(5) のタイプの

広義積分になっている。分点を 0 とする。 $x = \sin t$ と変数変換を行う。 $0 = \arcsin 0$ である。
 $u = \arcsin(1 - \varepsilon)$ とおく。 $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$ である。 $I(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ と
 おくと、 $I(\varepsilon) = \int_0^u \frac{1}{\cos t} \cos t dt = u$ なので $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I(\varepsilon) = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} u = \frac{\pi}{2}$ 同様に議論すれば

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ も分かる。}$$

演習問題 1.7 次の広義積分が収束するときは値を求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

$$(2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$$

$$(4) \int_0^{\infty} \cos x dx$$

1.5 物理量・面積・曲線の長さ

積分を用いると面積だけではなく、色々な物理量を求めることができる。その原理を確認しながら幾つかの物理量を計算しよう。最後に曲線の長さも計算する。

[物理量] 3つの物理量 X, Y, Z の間に $Z = Y \times X$ の関係があるとき、量 Z は一般に積分を用いて求める事ができる⁽¹⁾。

例えば (距離)=(速さ)×(時間) という関係がある。一定の速さ v で運動する物体が Δt の間に移動する距離は $v\Delta t$ となる。速さ v が変化する場合を考える。 $v = v(t)$ として、時刻 T_0 から時刻 T_1 の間に移動する距離 ℓ を求めてみよう。 $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ を $[T_0, T_1]$ の分割とし、小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 内に点 c_i をとる ($i = 1, \dots, n$)。また $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ と置く。

時刻 t_{i-1} から時刻 t_i の間に移動する距離は、その間物体が一定の速さ $v(c_i)$ で動いていると見做すと、 $v(c_i)\Delta t_i$ で近似できる。よって時刻 T_0 から時刻 T_1 の間の移動距離は $\sum_{i=1}^n v(c_i)\Delta t_i$ で近

似できる。分割を細かくして行くとこれは $\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt$ となる。以上により時刻 T_0 から時刻 t_1 の間に動いた距離 ℓ は

$$\ell = \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt$$

で与えられる事が分かる。

同様の議論を一般の場合に行くと次が得られる。量 X が $x_0 \rightarrow x_1$ と変化するとき、 Y が一定のとき、 $Z = Y \times (x_1 - x_0)$ と表される量 Z があるとする。 X が $x_0 \rightarrow x_1$ と変化するとき、 Y が $Y = Y(x)$ で与えられるとする。量 X が x_0 から x_1 まで変化したときの量 Z は

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} Y(x) dx$$

⁽¹⁾「 Z が外延量である」との制限が必要であるが、ここでは外延量、内包量に関してきちんと説明はしない。ここでは Z が加法性を持つこと、即ち長さの様に $1m$ と $2m$ を加えると $3m$ になるような性質、を仮定しておく。

で与えられる。

「(面積)=(縦)×(横)」なので、 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

で与えられる。

「(体積)=(縦)×(横)×(高さ)」である。空間内の領域が R を考える。平面 $x = u$ と R の共通部分の面積を $m(u)$ とする。即ちここでは「(体積) = (面積)×(高さ)」と見ている。 $x < a$ または $x > b$ のとき $m(x) = 0$ とする。 R の体積 V は

$$V = \int_a^b m(x) dx$$

で与えられる。

xy 平面上の連続曲線 $y = f(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$) と x 軸及び 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させて生じる回転体の体積を考える。平面 $x = t$ で切った断面の面積は $\pi f(t)^2$ なので求める体積は

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

となる。

演習問題 1.8 半径 r の球の体積を求めよ。

演習問題 1.9 $y = x^2$ と $y = 5x$ にはさまれる領域の面積を求めよ。またこの領域を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

演習問題 1.10 「(仕事)=(力)×(移動距離)」という関係がある。バネが x 伸ばされたとき働く力は k を比例定数とすると、 $F = kx$ であった。バネを x 伸ばすのに必要な仕事を求めよ。

演習問題 1.11 速度 V で走っている質量 M の車が等加速度運動 (等減速度運動と言うべきか) して停止した。このとき車を止めるために必要な仕事の量を M と V を用いて表せ。次は少し難しい問題、* 付きと考えること：等加速度運動でない場合に関しても、仕事の量を計算せよ。結果的には前と同じ答えになる⁽²⁾。

密度が一様でない銅線を考える。密度が一定のときは「(質量)=(線密度)×(長さ)」という関係がある。導線は $[a, b]$ に置かれているとする。点 x における線密度を $\mu(x)$ とするときこの銅線の質量 K は

$$K = \int_a^b \mu(x) dx$$

で与えられる。

質量 K の質点が x 軸上の x 座標が a である点にあるとする。この質点の (原点に関する) モーメントは aK である。密度が一様でない銅線が $[a, b]$ に置かれていて、点 x における線密度を $\mu(x)$

⁽²⁾ 仕事の量は速度の 2 乗に比例します。よく知られているように 120km/時の車を止めるには、60km/時の車の 4 倍の仕事量が必要になります。車を運転する人は十分注意して下さい

とするときこの銅線のモーメント M は

$$M = \int_a^b x\mu(x) dx$$

で与えられる。物体の重心とは、その物体の全質量がその点に存在する様な質点を考えたとき、そのモーメントが物体のモーメントと等しいような点なので、この導線の重心を c とすると

$$c \int_a^b \mu(x) dx = \int_a^b x\mu(x) dx$$

となる。

演習問題 1.12 一様な密度の半円板 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ の重心の座標を求めよ。

演習問題 1.13 一様な密度の材質でできている高さ h の円錐の重心は底面からどれくらいの所にあるか。

[面積] ここでは曲線が極座標表示されている場合と、パラメータ表示されている場合の面積の求め方を考える。曲線 C が $r = f(\theta)$ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) で与えられているとき、曲線 C 及び x 軸となす角 θ_0 である直線となす角が θ_1 である直線に囲まれた部分の面積 S を求める事を考える。

半径 r の円において角が θ_1 から θ_2 の部分の扇形の面積は $\frac{r^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ なので、

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2 d\theta$$

となる。

同じ曲線が $(x, y) = (x(t), y(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) とパラメータ表示されているとする。このとき $\tan \theta = \frac{y(t)}{x(t)}$ より $\theta = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ となるので、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2} = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$$

となる。 $f(\theta)^2 = r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ なので、積分の変数変換を行うと

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt$$

となる。

演習問題 1.14 $(x(t), y(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) が閉曲線のとき、即ち $(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_1), y(t_1))$ のとき、この閉曲線で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t) dt$$

である事を示せ。

演習問題 1.15 $r = f(\theta) = 1 + \cos \theta$ と極座標表示されている曲線を心臓形 (*cardioid*) という。これについて次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

演習問題 1.16 $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$ でパラメータ表示された曲線について次の問に答えよ。

- (1) この曲線の概形を書け。
- (2) この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

[曲線の長さ] 次に曲線の長さを求める事を考える。平面上の曲線 C がパラメータ t により $x = x(t), y = y(t), (a \leq t \leq b)$ と表されているとする。 $[a, b]$ の分割 Δ を考える。

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$P_i = ((x(t_i), y(t_i))) (i = 0, 1, \dots, n)$ とし折れ線 $P_0P_1 \cdots P_n$ で曲線 C を近似する。折れ線の長さは

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(c_i)^2 + y'(d_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

となる。ただし c_i, d_i は $t_{i-1} \leq c_i, d_i \leq t_i$ となる実数である。ここで分割を細かくしていった極限を考えると、極限では

$$(\text{曲線 } C \text{ の長さ}) = \int_a^b \left\{ \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \right\} dt$$

となる。

演習問題 1.17 演習問題 1.15 の曲線の長さを求めよ。

演習問題 1.18 極座標表示された曲線 $r = f(\theta) = \sin^3 \frac{\theta}{3}$ の概形を書き、全長を求めよ。

演習問題 1.19 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ。