

## 2 多変数関数の積分

積分を多変数に拡張しよう。拡張されるのは不定積分ではなく、定積分である。「積分 = 定積分」であり、不定積分はその計算法であるという事実が、多変数になると 1 変数の場合よりも明確になる。「多変数」という表題であるが、微分法のとくと同様に主要には 2 変数関数の場合を扱う。3 変数関数にも少しふれるが、一般の  $n$  変数関数の場合は扱わない。興味あるものは以前あげたテキストを参考にして欲しい。

### 2.1 定義と諸性質

定義の前に 1 変数関数の場合を振り返る。1 変数の場合積分とは関数と区間に対しある実数を対応させる写像と考える事ができる：即ち関数  $f$  と区間  $[a, b]$  に対し実数  $J(f; [a, b])$  が存在して次の 4 つの性質を持つ。

(1) [線型性]

$$1) J(f + g; [a, b]) = J(f; [a, b]) + J(g; [a, b])$$

$$2) J(\alpha f; [a, b]) = \alpha J(f; [a, b])$$

(2) [区間線型性]

$$J(f; [a, b]) = J(f; [a, c]) + J(f; [c, b])$$

(3) [単調性] 任意の  $x \in [a, b]$  に対し  $f(x) \leq g(x)$  となるとき

$$J(f; [a, b]) \leq J(g; [a, b])$$

(4) [単位の値] 値が 1 である定数関数  $\tau$  に対し

$$J(\tau; [a, b]) = b - a$$

具体的構成は、分割  $\Delta = \{x_0, \dots, x_n\}$  に対しリーマン和  $\Sigma(\Delta, \{c_i\}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$  を考え、 $\|\Delta\| \rightarrow 0$  としたときの極限として定義された。即ち

$$J(f; [a, b]) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \Sigma(\Delta, \{c_i\})$$

と定義した。

そこで 2 変数関数の積分としては次の様なものを考えたい。2 変数関数  $f$  と  $\mathbb{R}^2$  のある領域  $D$  に対し、実数  $J(f; D)$  を対応させる写像で次の 4 つの性質を持つ。

(1) [線型性]

$$1) J(f + g; D) = J(f; D) + J(g; D)$$

$$2) J(\alpha f; D) = \alpha J(f; D)$$

(2) [領域線型性] 領域  $D_1, D_2$  に対し  $m(D_1 \cap D_2) = 0$  のとき和集合  $C_1 \cup D_2$  を  $D_1 + D_2$  と書く。ただし  $m(X)$  は領域  $X$  の面積とする。

$$J(f; D_1 + D_2) = J(f; D_1) + J(f; D_2)$$

(3) [単調性] 任意の  $(x, y) \in D$  に対し  $f(x, y) \leq g(x, y)$  となるとき

$$J(f; D) \leq J(g; D)$$

(4) [単位の値] 値が 1 である定数関数  $\tau$  と長方形領域  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  に対し

$$J(\tau; D) = (b - a)(d - c)$$

このような積分  $J$  を定義するため 1 変数の場合と同様に分割を用いて定義する。ただし 2 変数になると領域の形が問題になるので定義は 2 段階で行う。最初は領域が長方形の場合、次に一般の場合を扱う。

定義 2.1 [定義域が長方形領域の場合] :

2 変数関数  $f(x, y)$  を考える。  $R$  の分割  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_m\}$  とは

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

となるものとする。  $i, j$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ) に対し小長方形領域  $\Delta_{ij}$  を

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

で定義する。各  $\Delta_{ij}$  に対しから小領域にぞくする点  $P_{ij} = (c_{ij}, d_{ij})$  を 1 つ定める。  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$  とおき、リーマン和を

$$\Sigma(\Delta; \{P_{ij}\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij}, d_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

と定義する。分割の最大幅  $\|\Delta\|$  を  $\|\Delta\| = \max\{\Delta x_i, \Delta y_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  で定義する。  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  とするとき、  $\Sigma(\Delta; \{P_{ij}\})$  が  $P_{ij}$  の選び方によらず同じ極限值に収束するならば、  $f$  は  $R$  で積分可能 (integrable) であるといい、極限値を

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \Sigma(\Delta; \{P_{ij}\})$$

で表す。

[定義域が一般の場合] :  $D$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界閉領域とする。  $f$  を  $D$  で定義された有界な関数とする。

$D$  を含む長方形領域  $R$  を 1 つ固定する。このとき  $f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$  と定義

する。  $f_D$  が  $R$  で積分可能のとき、  $f$  は  $D$  で積分可能であるといい、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f_D(x, y) dx dy$$

で定義する。

ここで2つ注意をしておく。1つ目はこの定義が矛盾なく定義されているかという点である。 $R$  と異なる長方形領域  $R'$  をとったとき,  $\iint_R f_D(x, y) dx dy$  が存在するのに  $\iint_{R'} f_D(x, y) dx dy$  が存在しなかったりすると, 積分可能という概念は確定しない。また  $\iint_R f_D(x, y) dx dy$  と  $\iint_{R'} f_D(x, y) dx dy$  の値が異なると積分値が確定しない。

2つ目は積分可能性の問題である。 $D$  の形は色々なものが考えられるので, 定数関数  $\tau$  に対しても  $\iint_D \tau(x, y) dx dy$  が存在しないものがある。その場合  $f$  が連続であっても, 積分可能にならない場合が起こる。我々はその様な領域は考えないことにする。積分領域  $D$  といったら,  $D$  上で定数関数は積分可能になる事を仮定する。(この様な領域を面積確定と呼ぶ。)有限個の滑らかな曲線で囲まれた図形は面積確定である。以下では積分領域は面積確定なものに限ることにする。解析学 I であつた「有限個の滑らかな曲線に囲まれた図形」であり, 有界であれば面積確定である。以下積分を考えるととき領域は面積確定を仮定する。この仮定の元で次の定理が成り立つ。

定理 2.2  $f$  が  $D$  で連続のとき  $f$  は  $D$  で積分可能である。

演習問題 \*\*2.1 長方形領域  $R$  で連続な関数は  $R$  で積分可能なことを示せ。

定義に従って積分を計算してみよう。 $z = f(x, y) = xy$  とし,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  とするとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

を求めよう。

分割  $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_n\}$  を  $x$  に関しても,  $y$  に関しても  $n$  等分割になっている様な分割, 即ち  $x_i = \frac{i}{n}, y_j = \frac{j}{n} (i, j = 0, 1, \dots, n)$  とする。このとき  $\Delta x_i = \frac{1}{n}, \Delta y_j = \frac{1}{n}, \|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$  である。小長方形領域を

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

とおく。 $P_{ij}$  として  $(x_i, y_j) = \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$  を選ぶ。このとき

$$\begin{aligned} \Sigma(\Delta_n; \{P_{ij}\}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \frac{j}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n i\right) \left(\sum_{j=1}^n j\right) \\ &= \frac{1}{n^4} \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると,

$$\iint_D xy dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(\Delta_n; \{P_{ij}\}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}$$

である。この計算では連続関数の積分可能性は仮定している。

演習問題 2.2 次の定積分を定義に基づいて計算せよ。ただし、連続関数の積分可能性は仮定してよい。

$$(1) \iint_D xy dx dy \quad (\text{ただし } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\})$$

$$(2) \iint_D xy dx dy \quad (\text{ただし } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\})$$

$$(3) \iint_D xy^2 dx dy \quad (\text{ただし } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\})$$

重積分の基本性質に関して確認しておこう。

定理 2.3 2重積分は次の性質を持つ。ただし積分領域は面積確定、被積分関数は積分可能を仮定し、 $m(D)$  は  $D$  の面積をあらわすものとする。また 2つの領域  $D_1$  および  $D_2$  に対し  $m(D_1 \cap D_2) = 0$  のとき領域  $D_1 \cup D_2$  を  $D_1 + D_2$  と表示することにする。

(1) [線型性]

$$1) \iint_D \{f(x, y) + g(x, y)\} dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$2) \iint_D \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy$$

(2) [領域線型性]

$$\iint_{D_1 + D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

(3) [単調性] 任意の  $(x, y) \in D$  に対し  $f(x, y) \leq g(x, y)$  となるとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

(4) [単位の値] 値が 1 である定数関数に対し

$$\iint_D 1 dx dy = m(D)$$

定理では面積というものが始めから存在するもののように取り扱っている。しかし、正確に述べると、面積というのは理論的には積分を用いて定義される。すなわち、 $\mathbb{R}^2$  の有界閉領域  $D$  に対し、値が 1 である定数関数  $\tau$  が  $D$  上で積分可能のとき、 $D$  は面積確定といい、その面積  $m(D)$  を

$$m(D) = \iint_D 1 dx dy$$

で定義する。その上でこの  $m$  が、面積に関して持っているであろうと今まで想定して来た性質を証明する事になる。この新しい面積の定義はいままで素朴な定義（長方形の面積は縦×横等）を含んでいる事が分かる。またすべての図形が面積を持つわけではない事も分かる。

演習問題 2.3 積分領域が長方形の場合に関して定理 2.3 (1) ~ (3) を証明せよ。

演習問題 2.4 領域  $D$  が  $m(D) = 0$  のとき  $D$  上で有界な任意の関数  $f$  に対し

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

が成立することを示せ (定理 2.3 を用いる)。

定理 2.4 [重積分の平均値の定理]  $D$  は連結とする。ただし連結とは  $D$  内の任意の 2 点が  $D$  内の曲線で結べることをいう。 $f$  は  $D$  で連続とする。このとき  $D$  内に点  $P = (x_0, y_0)$  が存在して

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) m(D)$$

となる。

証明  $D$  は有界閉集合なので最大値  $M$  を与える点  $(x_1, y_1)$  と、最小値  $m$  を与える点  $(x_2, y_2)$  が存在する。このとき  $D$  の任意の点  $(x, y)$  に対し  $f(x_2, y_2) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$  即ち  $m \leq f(x, y) \leq M$  が成立している。定理 2.3 (3) の単調性より  $\iint_D m dx dy \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D M dx dy$  が分かる。定理 2.3 (4) より  $\iint_D m dx dy = m \cdot m(D)$ ,  $\iint_D M dx dy = M m(D)$  となる。

$m(D) = 0$  の場合は演習問題 2.4 より  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$  となる。よって  $D$  の任意の点  $(x_0, y_0)$  に対し

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) m(D)$$

が成立する。

$m(D) \neq 0$  の場合,  $\mu = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{m(D)}$  とおくと,  $m \leq \mu \leq M$  である。 $(x_1, y_1)$  と  $(x_2, y_2)$  を結ぶ曲線を  $C$  とすると, 中間値の定理より  $f(x_0, y_0) = \mu$  となる  $C$  上の点  $P(x_0, y_0)$  が存在する。このとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) m(D)$$

が成立する。