解析学 II 要綱 #6

2.2　累次積分

重積分を定義に基づいて計算するのは，例の計算を思い出せば分かるように，大変である。ここでは計算する方法として「累次積分」を紹介する。累次積分を標語的にいうと「2 重積分 $=$ 1 変数積分 2 回」である。3 重積分の場合は「3 重積分 $=$ 1 変数積分 3 回」，n 重積分の場合は「n 重積分 $=$ 1 変数積分 n 回」といえる。

最初に特別な形の領域に名前をつけておこう。$[\,a,\, b\,]$ で定義された 2 つの連続関数を $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ とする。領域 D が

$$D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\right\}$$

の様に表わされるとき，領域 D を**縦線領域**または**縦線型**と呼び，このような表示を**縦線表示**と呼ぶ。

$[\,c,\, d\,]$ で定義された 2 つの連続関数を $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ とする。領域 D が

$$D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \,\right\}$$

の様に表わされるとき，領域 D を**横線領域**または**横線型**と呼び，このような表示を**横線表示**と呼ぶ。

縦線領域，横線領域は面積確定である。ある領域が縦線表示も横線表示も可能である場合もある。例えば円は縦線表示も横線表示も可能である。$D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1 \,\right\}$ とする。

$$D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2} \,\right\}$$

となる表示は D は縦線表示である。また

$$D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2} \,\right\}$$

は横線表示である。

定理 2.5 [**累次積分**] $D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\right\}$ は縦線表示されているとし，$f(x, y)$ は D で定義された連続関数とする。このとき D における f の積分 (重積分) に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx$$

また $D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \,\right\}$ は横線表示されているとき，重積分に対し次が成立する。

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

定理の証明は難しいので講義では省略する (特別な場合としての系 2.6 の証明は演習問題 2.5 にある)。証明を知りたいものは，解析学 I で以前あげたテキスト (高木貞治「解析概論」，小平邦彦「解析入門」ともに岩波書店) などを参考に。

定理の 2 つの式の左辺は重積分，右辺は 1 変数積分を 2 回している事に注意。重積分を 1 変数関数の積分 2 回 (累次積分) に正しく直す事ができる様になる事がここのポイントである。領域が長方形の場合次の様に簡単になる。

系 2.6 D を長方形領域，即ち $D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d\,\right\}$ とする。このとき次が成立する。

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,y)\,dy\right\}dx=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)\,dx\right\}dy$$

テキストでは

$$\int_a^b\left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

という表記法も用いているが，混乱をおこす場合があるので，この講義では採用しない。ただし各自がこの表記で計算する事を禁止するものではない。

演習問題 ***2.5**　連続な関数 f に対し系 2.6 を証明せよ。

例をいくつか計算してみよう。

例 2.7 (1) 最初に $I=\iint_D x^2y dxdy$ $\left(D=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\geqq 0, y\geqq 0, x+y\leqq 1\,\right\}\right)$ を考える。D は縦線型とも横線型とも見る事ができるので 2 通りの計算を実行しよう。**注意**：重積分の計算のときは積分領域を**必ず図示する事**!! 縦線型と見ると $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1-x$ となるので，

$$I=\iint_D x^2y dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x} x^2y\,dy\right\}dx$$

という累次積分の形にできる。後は 1 変数の積分を実行すればよい。実行すると

$$I=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{1-x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^2(1-x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{x^2-2x^3+x^4\right\}dx=\frac{1}{60}$$

となる。変数が 2 つあるため，定積分の計算の代入のとき間違った変数に代入する事がある。そのために $\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{1-x}$ という記号を採用した。

D を横線型と見做して同様の計算ができる。$0\leqq y\leqq 1$, $0\leqq x\leqq 1-y$ なので，

$$I=\iint_D x^2y dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-y} x^2y\,dx\right\}dy$$

となり，

$$I=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3y\right]_{x=0}^{1-y}dy=\int_0^1\frac{1}{3}(1-y)^3y\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1\left\{y-3y^2+3y^3-y^4\right\}dy=\frac{1}{60}$$

を得る。

2 重積分を累次積分で計算するとき，領域が縦線型かつ横線型であれば，x と y のどちらを先に積算してもよい。しかし計算の複雑さが大きく変わる場合がある。x を先に計算して複雑になってしょうがないときは，y を先に計算してみるのも 1 つの方法である。

(2)　次に $I = \iint_D |\sin(x+y)|dxdy$ $(D = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq 2\pi\})$ を考える。被積分関数に絶対値がついているので場合分けが必要になる。$\sin(x+y)$ は $0 \leqq x+y \leqq \pi$ では 0 以上，$\pi \leqq x+y \leqq 2\pi$ では 0 以下なので $D_1 = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, x+y \leqq \pi\}, D_2 = \{0 \leqq x, 0 \leqq y, \pi \leqq x+y \leqq 2\pi\}$ と領域を分ける。$D_1 \cap D_2$ の面積は 0 なので

$$\iint_D |\sin(x+y)|dxdy = \iint_{D_1} |\sin(x+y)|dxdy + \iint_{D_2} |\sin(x+y)|dxdy$$

となる。D_1 を縦線型と見ると，

$$D_1 = \{0 \leqq x \leqq \pi, 0 \leqq y \leqq \pi - x\}$$

と表す事ができる。よって

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} |\sin(x+y)|dxdy = \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{\pi-x} \sin(x+y)\,dy \right\} dx \\ &= \int_0^{\pi} \Big[-\cos(x+y) \Big]_{y=0}^{\pi-x} dx = \int_0^{\pi} (1+\cos x)\,dx = \pi \end{aligned}$$

となる。

また D_2 は縦線型にはなっているが，1 つの式で書く事ができないので更に 2 つの領域に分ける。$D_{21} = \{\,(x,y) \in D_2 \mid x \leqq \pi\,\}, D_{22} = \{\,(x,y) \in D_2 \mid x \geqq \pi\,\}$ とすると，$D_{21} \cap D_{22}$ の面積は 0 なので

$$I_2 = \iint_{D_2} |\sin(x+y)|dxdy = \iint_{D_{21}} |\sin(x+y)|dxdy + \iint_{D_{22}} |\sin(x+y)|dxdy$$

となる。$D_{21} = \{0 \leqq x \leqq \pi, \pi - x \leqq y \leqq 2\pi - x\}$, $D_{22} = \{\pi \leqq\leqq 2\pi, 0 \leqq y \leqq 2\pi - x\}$ と縦線型に書けるのでこれを計算して

$$I = I_1 + I_2 = \pi + 3\pi = 4\pi$$

となる。

演習問題 2.6　次の重積分について考える。ただし D は $y = x+1$ と $y = x^2 - 1$ で囲まれる領域とする。

$$I = \iint_D (x+y)dxdy$$

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表し，その後 I を求めよ。
(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表すために, 領域 D を 2 つの領域 D_1, D_2 に分け，それぞれの領域での積分を x を先にする形の累次積分で表せ。この方法で I を計算せよ。

演習問題 2.7　次の重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D x dx dy \quad D = \{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$　　ただし $a > 0, b > 0$ とする。

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)\, dx dy \quad D = \{x^2 \leqq y \leqq x+2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \left(2x^2 + 3y^3\right) dx dy \quad D = \{x^2 + y^2 \leqq a^2\}$　　ただし $a > 0$ とする。

(4) $\displaystyle\iint_D y^n dx dy \quad D = \{|x| + |y| \leqq 1\}$　　ただし n は自然数。

演習問題 2.8　そのままでは計算できない累次積分でも，積分の順序を入れ替えることで積分を計算することが可能になる場合もある。次の累次積分を重積分に直し，さらに積分の順序を入れ替えた累次積分に直すことにより計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx \ (a > 0)$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \left(\int_0^{\log x} \frac{1+y}{x}\, dy \right) dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(t \int_0^{t^2} \cos(1-x)^2\, dx \right) dt$

演習問題 2.9　次の重積分について考える。ただし $D = \{0 \leqq y \leqq x \leqq 1\}$ とする。

$$I = \iint_D e^{-x^2} dx dy$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) D をを横線形 ($\{\, (x,y) \mid c \leqq y \leqq d, h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。

(3) 重積分 I を x を先に計算する形の累次積分で表せ (計算を実行しなくてもよい)。

(4) D を縦線形 ($\{\, (x,y) \mid a \leqq x \leqq b, g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x) \,\}$ の形のもの) の形で表せ。

(5) 重積分 I を y を先に積分する形の累次積分で表せ。

(6) I を求めよ。