# 解析学 II 問題解説 #1

河野

**演習問題** $^*$**1.1**

$I$ で定義された関数 $y=f(x)$ が次を満たすとき**一様連続**であるという。

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,x'\in I\quad |x-x'|<\delta \implies |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

(1) 閉区間 $[\,a,\,b\,]$ で定義された関数が連続ならば一様連続であることを示せ。
(2) 連続な関数は積分可能であることを示せ。
(3) 単調関数は積分可能であることを示せ。

**(1)** 一様連続性の証明には閉区間が持つ次の性質を利用する。これを閉区間の**コンパクト性**という。

> $I$ を閉区間とする。任意の点 $x\in I$ に対し $x\in U_x$ となる開区間 $U_x$ が存在するとする。
> このとき有限個の点 $x_1,x_2,\dots,x_n\in I$ が存在して，$I\subseteq U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_n}$ が成立する。

任意に 1 つ $\varepsilon>0$ を選び固定して考える。$a$ を $I$ の任意の点とすると，$f$ は $a$ で連続なので，ある $\delta_a>0$ が存在して，任意の $x\in I$ に対し $|x-a|<\delta_a$ ならば $|f(x)-f(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立する。各 $a$ に対し $U_a=\left(\,x-\dfrac{1}{2}\delta_a,\,x+\dfrac{1}{2}\delta_a\,\right)$ とおく。コンパクト性の条件より $a_1,a_2,\dots,a_n$ が存在して $I\subseteq U_{a_1}\cup U_{a_2}\cup\cdots\cup U_{a_n}$ が成立する。このとき $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2}\delta_{a_i}\,\middle|\,i=1,\dots,n\right\}$ とおく。$\delta$ が一様連続の条件を満たすことを示す。

$x,x'\in I$ を $|x-x'|<\delta$ を満たす点とする。このときある $i$ について $x\in U_{a_i}$ となっている。このとき $|x-a_i|<\dfrac{1}{2}\delta_{a_i}\leqq\delta_{a_i}$ なので $|f(x)-f(a_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立する。また

$$|x'-a_i|=|x'-x+x-a_i|\leqq|x'-x|+|x-a_i|<\delta+\frac{1}{2}\delta_{a_i}\leqq\frac{1}{2}\delta_{a_i}+\frac{1}{2}\delta_{a_i}=\delta_{a_i}$$

より $|f(x')-f(a_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立する。よって

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x')|&=|f(x)-f(a_i)+f(a_i)-f(x')|\\&\leqq|f(x)-f(a_i)|+|f(a_i)-f(x')|\\&=|f(x)-f(a_i)|+|f(x')-f(a_i)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

となり証明される。

**(2)** $f$ を $[\,a,\,b\,]$ で連続な関数とする。$\Delta=\{\,x_0,x_1,\dots,x_n\,\}$ を $[\,a,\,b\,]$ の分割とする。また各小区間 $[\,x_{i-1},\,x_i\,]$ に対し点 $c_i\in[\,x_{i-1},\,x_i\,]$ を選び，リーマン和 $\Sigma(\Delta;\{\,c_i\,\})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$ を考える。各小区間 $[\,x_{i-1},\,x_i\,]$ における $f$ の最大値を $\ell_i$，最小値を $m_i$ とする。即ち

$$\ell_i=\max\{\,f(x)\mid x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\,\},\qquad m_i=\min\{\,f(x)\mid x_{i-1}\leqq x\leqq x_i\,\}$$

とすると

$$m_i \leqq f(c_i) \leqq \ell_i$$

が成立する。これに $\Delta x_i$ を掛けて $i=1$ から $n$ まで加えると

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \ell_i \Delta x_i$$

が得られる。$s(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$，$S(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ell_i \Delta x_i$ とおく。$\|\Delta\| \to 0$ のとき $s(\Delta), S(\Delta)$ が共に同じ値に近づくならば $\Sigma(\Delta; \{\, c_i \,\}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ も $c_i$ の選び方によらず，その値に近づき積分可能であることが証明される。以下それを示す。

(a) 2 つの分割 $\Delta_1, \Delta_2$ が $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ のとき，即ち，分割 $\Delta_2$ が分割 $\Delta_1$ の細分になっているとき，

$$s(\Delta_1) \leqq s(\Delta_2) \leqq S(\Delta_2) \leqq S(\Delta_1)$$

が成立する。

分割 $\Delta = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\}$ とする。小区間 $[\, x_{i-1},\, x_i \,]$ を $y_i$ で 2 つの小区間に分けた状況を考える。$[\, x_{i-1},\, y_i \,]$ での $f$ の最小値を $m_{i1}$，最大値を $\ell_{i1}$ とおくと

$$m_i \leqq m_{i1} \leqq \ell_{i1} \leqq \ell_i$$

が成立する。同様に $[\, y_i,\, x_i \,]$ での $f$ の最小値を $m_{i2}$，最大値を $\ell_{i2}$ とおくと

$$m_i \leqq m_{i2} \leqq \ell_{i2} \leqq \ell_i$$

が成立する。$\Delta' = \Delta \cup \{\, y_i \,\}$ とおくと前述のことより

$$s(\Delta) \leqq s(\Delta') \leqq S(\Delta') \leqq S(\Delta)$$

が成立する。$\Delta_2$ は $\Delta_1$ にこのような分割を何回か行ったものなので (a) が成立する。

(b) $\Delta_1, \Delta_2$ を $[\, a,\, b \,]$ の任意の分割とするとき

$$s(\Delta_1) \leqq S(\Delta_2)$$

が成立する。

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とする。$i=1$ および $i=2$ に対し $\Delta_i \subseteq \Delta$ が成立しているので (a) より $s(\Delta_1) \leqq s(\Delta)$ および $S(\Delta) \leqq S(\Delta_2)$ が成立する。$s(\Delta) \leqq S(\Delta)$ より $s(\Delta_1) \leqq S(\Delta_2)$ が成立する。

(c) (b) より $\sup\{\, s(\Delta) \mid \Delta\text{は分割} \,\}$ および $\inf\{\, s(\Delta) \mid \Delta\text{は分割} \,\}$ が存在する。このとき

$$a_1 = \inf\{\, s(\Delta) \mid \Delta\text{は分割} \,\}, \qquad a_2 = \sup\{\, s(\Delta) \mid \Delta\text{は分割} \,\}$$

とおくと $a_1 \leqq a_2$ が成立する。

(d) 任意の正数 $\varepsilon$ に対しある正数 $\delta$ が存在して，任意の分割 $\Delta$ に対し

$$\|\Delta\| < \delta \implies 0 \leqq S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon$$

が成立する。

$0 \leqq S(\Delta) - s(\Delta)$ は常に成立している。任意の正数 $\varepsilon$ に対し $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ とおく。一様連続性よりこの $\varepsilon'$ に対しある正数 $\delta$ が存在して

$$\forall x, x' \in I \quad |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon'$$

が成立する。小区間 $[\, x_{i-1}, x_i \,]$ で考える。小区間の最小値をあたえる $x$ の値を $x_1$，最大値を与える $x$ を $x_2$ とする。即ち

$$m_i = f(x_1), \qquad \ell_i = f(x_2)$$

とする。このとき $x_1, x_2 \in [\, x_{i-1}, x_i \,]$ より $|x_2 - x_1| \leqq x_i - x_{i-1} \leqq \|\Delta\| < \delta$ を満たしているので

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon'$$

即ち $\ell_i < m_i + \varepsilon'$ が成立する。$i = 1$ から $n$ まで $\Delta x_i$ 倍して加えると

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + \varepsilon' \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + \varepsilon'(b-a)$$

となり，

$$S(\Delta) < s(\Delta) - \varepsilon$$

が得られる。

(e) (d) より $a_1 = a_2$ が成立する。この値を $\alpha$ とする。また (d) より任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して，分割 $\Delta$ が $\|\Delta\| < \delta$ を満たしているとき，

$$0 \leqq \alpha - s(\Delta) \leqq S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon, \qquad 0 \leqq S(\Delta) - \alpha \leqq S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon$$

が成立する。よって $\|\Delta\| \to 0$ のとき $s(\Delta) \to \alpha, S(\Delta) \to \alpha$ が示される。

**(3)** 単調関数には単調増加と単調減少があるが，単調増加の場合のみ証明する。単調減少の場合は符号が入れ替わるなど若干の変更で証明ができるので各自試みよ。

連続関数に関する証明は (d) の部分を除いて単調増加の場合も適用できる。ここでは $f$ が単調増加の場合も (d) が成立することを示す。即ち $f$ が単調増加のとき，任意の正数 $\varepsilon$ に対しある正数 $\delta$ が存在して，任意の分割 $\Delta$ に対し

$$\|\Delta\| < \delta \implies 0 \leqq S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon$$

が成立する。

$0 \leqq S(\Delta) - s(\Delta)$ は常に成立している。$\varepsilon$ に対し $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$ とおく。このとき $\delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon$ が成立していることを注意しておく。$f$ は単調増加であるから小区間での最小値は区間の左端，最大値は区間の右端でとる。即ち分割を $\Delta = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\}$ とするとき，

$$m_i = f(x_{i-1}), \qquad \ell_i = f(x_i)$$

となっている。$\Delta$ を $\|\Delta\| < \delta$ を満たす分割とする。

$$\begin{aligned} S(\Delta) - s(\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} \ell_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\ell_i - m_i) \Delta x_i \\ &< \sum_{i=1}^{n} (\ell_i - m_i) \delta = \delta \sum_{i=1}^{n} (\ell_i - m_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= \delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

となり，(d) が成立する。

**演習問題 1.2**　次の関数の定積分を定義に基づいて求めよ。定理 1.2 の成立は仮定する。ただし次の公式を用いる必要があるかもしれない。

$$
\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}
$$

(1) $\displaystyle\int_1^3 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

積分可能性は仮定しているので，$\|\Delta_n\| \to 0$ となる分割の列 $\Delta_n$ を 1 つ定め $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\})$ を計算すればよい。

**(1)**　$\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $[1, 3]$ の $n$ 等分を与える分割とする。即ち，$x_i = 1 + \dfrac{2i}{n}$ とする。$c_i$ として小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の右端の値，即ち $c_i = x_i = 1 + \dfrac{2i}{n}$ を選ぶ。

また $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{2}{n}$ なので

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n} n = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2
\end{aligned}
$$

となる。$\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$ なので $n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\}) = 4$ なので

$$
\int_1^3 x dx = 4
$$

となる。

**(2)**　$\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $[0, 1]$ の $n$ 等分を与える分割とする。即ち，$x_i = \dfrac{i}{n}$ とする。$c_i$ として小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の右端の値，$c_i = x_i = \dfrac{i}{n}$ を選ぶ。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$ なので

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。$\|\Delta_n\| = \dfrac{1}{n}$ なので $n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\}) = \frac{1}{4}$ となるので

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

となる。

**(3)**　$\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ の $n$ 等分を与える分割とする。即ち，$x_i = \dfrac{\pi i}{2n}$ とする。$c_i$ として小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の右端の値，$c_i = x_i = \dfrac{\pi i}{2n}$ を選ぶ。$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ なので

$$\begin{aligned}\Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\}) &= \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi i}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n} - \cos\left\{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right\}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}} \\ &= \frac{\dfrac{\pi}{4n}}{\sin\dfrac{\pi}{4n}}\left\{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right\}\right\}\end{aligned}$$

となる。$\|\Delta_n\| = \dfrac{\pi}{2n}$ なので $n \to \infty$ のとき $\|\Delta_n\| \to 0$ となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Sigma(\Delta_n; \{\, c_i \,\}) = 1$ となるので

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

となる。