

演習問題 1.5 命題 1.12 を証明せよ。

(1) はすでに証明してあるので, (2) を示す。今 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ が成立している。

$\int_{-a}^0 f(x) dx$ において $t = -x$ と変数変換すると, $\frac{dx}{dt} = -1$ であり, $x: -a \rightarrow 0$ のとき $t: a \rightarrow 0$ となる。

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-t) \frac{dx}{dt} dt = \int_a^0 -f(t)(-1) dt = \int_a^0 f(t) dt \\ &= -\int_0^a f(t) dt = -\int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

なので $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ が示される。

演習問題 1.6 次の定積分を微積分の基本定理を用いて計算せよ。

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{4x - 3}{(x^2 + 1)(x - 2)^2} dx$

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$

(4) $\int_0^1 \arctan x dx$

(5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^3 x - \sin x) dx$

(6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx$

この積分はどれもそれほど難しくはない。不定積分で学んだことが身についているかの確認のつもりで解いて見る事。いずれの関数も積分区間で連続なので微積分の基本定理を使うことができる。

(1) $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x + 2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x - 2} dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x + 2} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\log |x - 2| \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[\log |x + 2| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} (\log 1 - \log 2) - \frac{1}{4} (\log 3 - \log 2) = -\frac{1}{4} \log 3 \end{aligned}$$

(2) $\frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$ と部分分数展開できる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4x-3}{(x^2+1)(x-2)^2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\left[\frac{1}{x-2}\right]_0^1 - \left[\arctan x\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} - (\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 置換積分法を用いる。 $t = 1 - x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2x$ なので、 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}$ である。また x が $x: 0 \rightarrow 1$ と変化するとき、 t は $t: 1 \rightarrow 0$ と変化する。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx &= \int_1^0 x\sqrt{t} \frac{dx}{dt} dt = \int_1^0 x\sqrt{t} \left(-\frac{1}{2x}\right) dt = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(4) 部分積分法を用いる。 $t = \arctan x$ は「 $x = \tan t$ かつ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 」と同値であるから、 $\arctan 0 = 0, \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ である。 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 、 $x' = 1$ である事に注意する。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= \int_0^1 x' \arctan x dx \\ &= \left[x \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 x (\arctan x)' dx \\ &= \arctan 1 - 0 \arctan 0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} du \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\log u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

(5) $f(x) = \sin^3 x - \sin x$ とおくと $f(-x) = \sin^3(-x) - \sin(-x) = (-1)^3 \sin^3 x - (-1) \sin x = -(\sin^3 x - \sin x) = -f(x)$ なので、 $f(x)$ は奇関数である。よって $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x - \sin x dx = 0$ である。

(6) $f(x) = \cos^3 x$ とおくと $f(-x) = \cos^3(-x) = \cos^3 x = f(x)$ なので、 $f(x)$ は偶関数である。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

なので, $t = \sin x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ より $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos x}$ となる。 $x : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $t : 0 \rightarrow 1$ なので

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx &= 2 \int_0^1 (1 - t^2) \cos x \frac{1}{\cos x} \, dt \\ &= 2 \int_0^1 (1 - t^2) \, dt \\ &= 2 \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$